

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXII.

*I. Ueber die langsame Verdichtung  
der Kohlensäure an blanken Glasflächen und  
Kayser's Einwürfe dagegen; von R. Bunsen.*

Im 21. Bande dieser Annalen, p. 495—498, hat Kayser nachzuweisen gesucht, dass die von mir beobachtete längere Dauer der Kohlensäureverdichtung an Glasfäden auf einer von mir übersehenen Fehlerquelle beruhe, und dass alles, was ich für eine solche Verdichtung gehalten, nichts anderes gewesen sei, als eine durch die Fettschicht der Einschleifungen erfolgte Absorption und Diffusion. Er stützt diese Ansicht auf einen Versuch, bei welchem er die wohl für niemand, der sich mit gasometrischen Arbeiten beschäftigt hat, überraschende Thatsache beobachtete, dass in 47 Tagen 2,81 ccm Kohlensäure durch, mit sehr hartem Fette gedichtete luftdichte Schliffflächen in atmosphärische Luft diffundirten. Er bemerkt dabei ausdrücklich, dass er den Versuch mit einem Apparate angestellt, welcher den Fehler des meinigen in weit höherem Grade besass. Ich muss gestehen, dass es mir nicht recht einleuchtend ist, weshalb Hr. Kayser nicht den viel berechtigteren, gerade entgegengesetzten Schluss aus seinem Versuche gezogen hat. Er erhielt nämlich in 47 Tagen eine durch Diffusion bewirkte Volumenverminderung von 2,44 ccm, während mein Versuch in derselben Zeit eine nach Kayser's Ansicht ebenfalls lediglich von Diffusion herrührende Volumenverringerung von 20,37 ccm ergab. Wenn es ihm daher gelang, den von mir vermeintlich begangenen Fehler durch einen besonders ungünstig construirten Apparat um das Zehnfache zu verringern, sollte es dann — wird man billig fragen dürfen — für mich eine Unmöglichkeit gewesen sein, mit Hülfe meines

nicht besonders ungünstig, sondern sogar möglichst günstig construirten Apparates den vermeintlichen Fehler noch einmal um das Zehnfache oder so weit herabzumindern, dass er als verschwindend klein ausser Betracht bleiben konnte? Hr. Kayser scheint sich diese Frage gar nicht vorgelegt zu haben, sonst würde er doch wohl Anstand genommen haben, die Schlussfolge aus seinem Diffusionsversuche für eine unumstössliche zu halten, indem er l. c. p. 497 sagt:

„Dadurch ist zweifellos erwiesen, dass die Fettschichten an dem dauernden Verschwinden des Gases schuld sind, und dass die von Bunsen zur Erklärung seiner Resultate aufgestellte Hypothese, das Gas dringe unter grosser Reibung langsam in das Glas ein, unnöthig ist.“

Ich möchte fast glauben, dass Hrn. Kayser eine so zuversichtliche Erklärung, wie sie sich in diesen Worten ausspricht, etwas bedenklich erschienen sein würde, wenn er versucht hätte, die Berechtigung zu derselben etwas eingehender an den Ergebnissen meiner Beobachtungen zu prüfen. Ich will daher diese Prüfung nachholen:

Die in die Volumeneinheit einer Flüssigkeit oder eines analog wirkenden Körpers eindringenden Gasvolumina sind bekanntlich unter sonst gleichen Umständen proportional dem totalen oder partiellen Drucke, unter dem die Absorption erfolgt. Ganz dasselbe gilt auch umgekehrt für die aus Flüssigkeiten in heterogene Atmosphären austretenden Gase. Bei Beginn der Beobachtungen<sup>1)</sup> enthielt nun mein Apparat 80,172 ccm freie Kohlensäure; als nach 110 Tagen davon nur noch 47,163 ccm vorhanden waren, wurden, um die Ablesungen fortsetzen zu können, noch 42,3 ccm hinzugefügt, also das vorhandene Volumen und mit ihm der diffuse Druck nahezu verdoppelt. Wäre, wie Kayser behauptet, die von mir beobachtete Volumenabnahme des Gases eine Folge von Diffusion gewesen, so hätte sich nothwendig bei dem jetzt nahezu verdoppelten partiellen Drucke der im Apparat befindlichen Kohlensäure eine entsprechende Veränderung der Gasver-

1) Bunsen, Wied. Ann. 20. p. 553. 1888.

ringerung zu erkennen geben müssen. Davon bemerkt man aber auch nicht die leiseste Spur, sondern gerade das Gegentheil, da die nachstehende, meinen früheren Versuchen entnommene Tabelle zeigt, dass die Volumenabnahme vor und nach der Zulassung des Gases am regelmässigsten verläuft.

Tabelle V.

I	II	III	I	II	III
$T$	$V$	$\frac{V_1 - V_0}{T_1 - T_0}$	$T$	$V$	$\frac{V_1 - V_0}{T_1 - T_0}$
0,000	0,000		17,07	23,247	0,62
0,331	3,351	10,13	19,87	24,823	0,56
1,053	6,654	4,58	23,29	26,915	0,58
2,464	10,247	2,55	26,65	28,56	0,52
4,173	12,407	1,27	29,81	30,08	0,48
5,689	13,977	1,05	32,42	31,46	0,52
7,342	15,552	0,94	35,54*	32,65	0,38
9,162	17,488	1,06	39,03	33,96	0,38
11,14	19,268	0,90	42,64	35,47	0,42
13,36	21,268	0,94	46,31	36,85	0,38
15,22	22,095	0,45	51,41	38,45	0,31

Columnne I dieser Tabelle enthält die Beobachtungszeiten, eine dreitägige Zeitdauer als Einheit angenommen, Col. II das bis zu diesen Beobachtungszeiten adsorbierte Kohlen-säurevolumen von 0° C. und 0,76 m Quecksilberdruck in Cubikcentimetern, Col. III die mittlere dreitägige Volumenabnahme innerhalb zweier aufeinanderfolgenden Beobachtungszeiten.

Da es keine vom Drucke unabhängige Gasdiffusion oder Flüssigkeitsabsorption gibt, so halte ich es für erwiesen, dass Diffusionserscheinungen die von mir beobachtete Gasabnahme nicht bedingt haben können, und daher Kayser's Behauptung eine irrige ist.

Um nichts besser verhält es sich mit Kayser's Erklärung der von mir gefundenen Thatsache, dass die Adsorption innerhalb gewisser Grenzen mit der Temperatur steigt und vom Drucke nicht merklich beeinflusst wird. Man weiss, dass die Absorptionscoefficienten mit erhöhter Temperatur abnehmen. Ist aber diese Thatsache, von der ich keine Ausnahme kenne, richtig, so müsste, wenn es sich bei

meinen Versuchen um gar keine Adsorption, sondern lediglich nur um eine durch Flüssigkeitsabsorption vermittelte Diffusion handelte, die meiner früheren Abhandlung beigegebene Curve (l. c. p. 554 Fig. 2) mit wachsender Temperatur nicht rascher ansteigen, sondern herabsinken. Aber auch hier zeigt ein Blick auf diese Curve übereinstimmend an drei verschiedenen Stellen gerade das Gegentheil.

Ich könnte es daher bei diesem Nachweise der theoretischen Widersprüche, in welche sich die von Kayser versuchte Auslegung meiner Versuche verwickelt, füglich bewenden lassen, wenn er seiner Beweisführung nicht noch die Bemerkung hinzugefügt hätte:

„Schliesslich bemerke ich noch, dass man aus Bunsen's Resultaten folgern kann, dass die Diffusion der Kohlensäure mit steigender Temperatur zunimmt, vom Drucke aber nur in geringem Grade beeinflusst wird.“

Wenn man sich erlauben dürfte, für einen ganz speciel- len Fall ohne alle weitere Begründung ein Ausnahmsgesetz zu statuiren — ich meine eine Diffusion, die vom Drucke nur in geringem Maasse beeinflusst wird —, so wäre damit allerdings meiner ganzen Argumentation die Spitze abgebrochen. Allein ich glaube, dass sich nach dem Gesagten wohl schwerlich jemand finden würde, ein solches ohne alle und jede Beweise aufgestelltes Ausnahmsgesetz gelten zu lassen, oder wohl gar, wie es Kayser thut, aus meinen Versuchen abzuleiten. Keineswegs daher, um einer solchen Annahme noch besonders entgegen zu treten, sondern lediglich nur, um Hrn. Kayser und mir jede Mühe und Zeit weiterer Erörterungen zu ersparen, will ich hier noch einen endgültig entscheidenden Versuch besprechen, der keiner mehrdeutigen Auslegung fähig ist.

Es diene dazu ein weites, mit einer auf Cubikcentimeter calibrirten Theilung versehenes, unten offenes, oben ausgezogenes weites Verbrennungsrohr, in dessen oberem Ende sich Glasfäden von derselben Sorte, welche zu meinen früheren Versuchen gedient haben, befanden. In dieses so vorgerichtete Rohr wurde während zweier Tage von Zeit zu Zeit völlig getrocknete Luft eingelassen und wieder durch



Auspumpen entfernt, darauf durch den Apparat zwei Stunden lang ein lebhafter Strom reiner, sorgfältig gewaschener, wohlgetrockneter Kohlensäure geleitet, sodann der ausgezogene Theil des Rohres an einer verengten Stelle, die zum Anfangspunkte der Calibrirung genommen war, abgeschmolzen und endlich das so hergerichtete Instrument zu den Beobachtungen in der Quecksilberwanne des Gaszimmers aufgestellt. Bei den Ablesungen wurde ganz wie bei meinen früheren Versuchen verfahren.

Es sei  $V_0$  das auf  $0^\circ$  C. und 0,76 m Quecksilberdruck reducirte, zur Zeit  $T_0$  an der Theilung beobachtete Kohlensäurevolumen,  $V_1$  das bis zur Zeit  $T_1$  durch Adsorption verringerte Volumen bei dem Drucke  $P_1$  und der Temperatur  $t_1$ , so ist das in dem Zeitintervall  $T_1 - T_0$  adsorbirte, auf  $0^\circ$  und 0,76 m reducirte Volumen  $V_2$ :

$$V_2 = V_0 - \frac{P_1}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + 0,00366 t_1} V_1.$$

Die erste Beobachtung  $V_0$  geschah, nachdem die Glasfäden bereits drei bis vier Stunden während des Füllens, Aufstellens und Erkaltes des Apparates mit Kohlensäure

Tabelle VI.

I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
$T$	$V$	$\frac{V_1 - V_0}{T_1 - T_0}$	$t^\circ$	$P$	$T$	$V$	$\frac{V_1 - V_0}{T_1 - T_0}$	$t^\circ$	$P$
0,000	0,000	4,39	11,3	0,7093	14,739	25,858	0,876	8,7	0,6249
1,045	4,589	2,75	11,3	0,6983	15,739	26,651	0,793	8,2	0,6230
1,837	8,768	2,14	11,0	0,6965	16,739	27,399	0,748	8,0	0,6203
1,941	8,990	2,11	11,1	0,6959	17,739	28,189	0,790	8,0	0,6173
2,142	7,414	2,18	10,9	0,6943	18,739	28,859	0,670	8,2	0,6121
2,691	8,612	1,94	9,7	0,6897	19,739	29,542	0,683	9,6	0,6099
3,149	9,499	2,15	11,0	0,6874	20,739	30,245	0,703	10,2	0,6093
3,733	10,756	1,66	10,3	0,6833	21,739	30,995	0,750	10,5	0,6080
4,739	12,414	1,53	10,4	0,6772	22,739	31,817	0,822	11,6	0,6034
5,739	13,943	1,82	10,4	0,6721	23,739	32,604	0,787	12,3	0,6018
6,739	15,762	1,40	10,8	0,6660	24,739	33,329	1,225	13,0	0,5964
7,739	17,165	1,75	10,9	0,6605	25,739	34,812	0,983	18,9	0,5947
8,739	18,919	1,40	10,4	0,6529	26,739	35,926	1,11	14,3	0,5882
9,739	20,316	1,31	11,3	0,6473	27,739	36,935	1,01	13,3	0,5868
10,739	21,621	1,26	10,3	0,6425	28,739	38,206	1,27	11,7	0,5810
11,739	22,878	1,05	9,7	0,6390	29,739	39,040	0,834	11,2	0,5764
12,739	23,928	1,05	9,3	0,6337	30,739	39,987	0,947	11,2	0,5736
13,739	24,982		9,0	0,6298	31,739	40,741	0,754	11,2	0,5739

in Berührung gewesen waren. Um das in diesem Zeitraume von den Glasfäden adsorbierte Gasvolumen sind daher die Adsorptionen zu klein gemessen. Die vorstehende Tab. VI umfasst eine Beobachtungsreihe von nur 31 Tagen, die aber zur endgültigen Erledigung der Frage, um die es sich hier handelt, schon völlig ausreichend ist. Col. I gibt die Zeiten der aufeinander folgenden Beobachtungen in Tagen und deren Bruchtheilen, Col. II die zu diesen Beobachtungszeiten adsorbierten Kohlensäurevolumina in Cubikcentimetern von 0° C. und 0,76 m Quecksilberdruck, Col. III die innerhalb zweier aufeinander folgender Beobachtungen in 24 Stunden adsorbierte Kohlensäure in Cubikcentimetern und endlich Col. IV und V die den Beobachtungen zugehörigen Temperaturen und Drucke.

Kayser sagt l. c. p. 494: „Wenn Bunsen seinen Vorgängern auf diesem Gebiete der Untersuchung vorwirft, sie hätten sich von dem Eintreten eines Maximums nicht überzeugt, sondern es ohne weiteres angenommen, so muss ich darauf erwidern, dass ich bei nicht publicirten Vorversuchen zur Verdichtung der Gase an Glas auch speciell für Kohlensäure ein sehr rasches Eintreten der Maximalverdichtung habe constatiren können, sodass mindestens 99% der Verdichtung in der ersten Stunde nach Zulassung des Gases vollendet sind, in der zweiten Stunde manchmal noch eine kleine Verdichtung bemerkbar ist, während in den folgenden drei bis vier Tagen keinerlei messbare Aenderung mehr auftritt.“

Da an dem Apparate, mit welchem meine Resultate der Tabelle VI erhalten sind, gar keine gefetteten Hähne oder eingefettete Schliffflächen vorhanden waren, so hätte also nach diesen von Kayser nicht publicirten Vorversuchen das Maximum der Verdichtung schon während der Zeit, die ich bei der Füllung der Röhre auf Durchleiten der Kohlensäure verwandte, vollkommen erreicht sein müssen. Statt dessen zeigt sich, ganz wie ich es früher fand, nach dem Zeitpunkte, wo Kayser das statische Gleichgewicht als längst erreicht betrachtet, und wo also gar keine Adsorption mehr hätte stattfinden können, in den ersten sechs Tagen noch eine

solche von 14,4 ccm; diese steigt dann in den folgenden sechs Tagen auf 23,2 ccm, in weiteren sechs Tagen auf 28,4 ccm, nach abermals sechs Tagen auf 32,9 ccm und am 31. Tage über 40 ccm. Ferner zeigt sich, ganz wie bei meinen früheren Versuchen, dass während der ganzen 31 tägigen Beobachtungsdauer, trotzdem dass der Druck stetig von 0,7093 m auf 0,5736 m abnahm, nicht die mindeste Loslösung des adsorbirten Gases statt fand. Endlich ergibt sich nicht minder in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen meiner früheren Beobachtungen, dass die Adsorption mit sinkender Temperatur abnimmt, mit wachsender aber sich steigert.

Es zeigt sich also, dass der Apparat ohne gefettete Einschleifungen ganz dieselben Resultate gibt, wie der mit gefetteten Einschleifungen versehene.

Und so fällt denn das ganze Gebäude der von Kayser gemachten Einwürfe, da sich dasselbe einzig und allein auf die Anwesenheit gefetteter Einschleifungen stützt, in sich selbst zusammen. Man sieht daher, dass, wenn irgendwo Fehler begangen wurden, diese nicht in meiner Arbeit zu suchen waren.

Das Endresultat dieser Mittheilung aber kann ich dahin zusammenfassen:

1. dass der Vorwurf, eine Fehlerquelle bei meinen Versuchen übersehen und infolge dessen Adsorptionserscheinungen mit Diffusionsphänomenen verwechselt zu haben, mich nicht trifft;

2. dass Kayser's Interpretation meiner Beobachtungen als eine mit der Theorie und mit den Thatsachen in Widerspruch stehende, völlig unhaltbar ist und mir daher die Berechtigung zusteht, die experimentellen und theoretischen Resultate meiner Arbeit in allen ihren Einzelheiten und mit allen ihren Consequenzen nach wie vor aufrecht zu erhalten.

Es wird nun die nächste Aufgabe sein müssen, durch weitere Vorversuche zu ermitteln, wie sich die vom Glase adsorbirte Kohlensäure in höherer als den von mir bisher

untersuchten Temperaturen verhält, und welche Rolle die an der Glasoberfläche sich ebenfalls während einer langen Zeitdauer anhäufende atmosphärische Luftschicht bei den von mir festgestellten Thatsachen spielt.

Heidelberg, den 16. April 1884.

## II. Ueber die Diffusion von Gasen und Dämpfen; von A. Winkelmann.

Zweite Mittheilung.<sup>1)</sup>

Die früheren Versuche hatten gezeigt, dass der Diffusionscoefficient mit wachsendem Abstände der verdampfenden Flüssigkeit von dem Ende des Rohres, aus welchem die Verdampfung vor sich geht, wächst, oder dass der Quotient  $t/\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$  mit wachsendem  $h$  abnimmt. Es bezeichnet hier  $t$  die Zeit, welche verstreicht, damit das Flüssigkeitsniveau von  $h_0$  bis  $h_1$  fällt. Aus einem Versuche, welcher die Verdampfung des Wassers in Wasserstoff bis zu grösseren Werthen von  $h$  verfolgte, schien hervorzugehen, dass die Abnahme des fraglichen Quotienten langsamer vor sich geht, als die Zunahme von  $h$ . Hierdurch wurde es wahrscheinlich, dass die Zunahme des Diffusionscoefficienten, indem der Quotient einer bestimmten Grenze zustrebt, nur eine scheinbare ist, welche in einer Aenderung des Dampfdruckes an der Oberfläche der Flüssigkeit begründet ist. Ich habe dieses jetzt näher untersucht und gebe im Folgenden die Resultate wieder.

Da der Wasserdampf in einer höheren Temperatur sich durch eine starke Veränderung auszeichnete, habe ich diesen benutzt. Um sicher vergleichbare Resultate zu erhalten, wurde folgende Anordnung getroffen. In das Wasserbad wurden zwei Glasröhren der früher angedeuteten Form mit den Verdampfungsröhren so tief eingesetzt, dass die verdampfenden Oberflächen, welche verschiedene Abstände von

1) Erste Mittheilung Wied. Ann. 22. p. 1. 1884.

dem Ende des Verdampfungsrohres hatten, in demselben Niveau lagen. Der von dem Entwicklungsapparat ausgehende Gasstrom machte folgenden Weg: 1) durch eine Flasche mit Schwefelsäure, 2) durch ein Rohr mit Chlorcalcium, 3) durch die erste Röhre im Wasserbad, 4) durch ein zweites Rohr mit Chlorcalcium, endlich 5) durch die zweite Röhre im Wasserbad. Um zu erfahren, ob durch diese Einrichtung in dem ersten Rohre des Wasserbades sich nicht ein grösserer Ueberdruck ausbildete, wurde vorübergehend ein kleines Wassermanometer eingeschaltet; es zeigte sich der Ueberdruck so klein, dass es nicht nothwendig war, darauf Rücksicht zu nehmen.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate zusammengestellt. Die Temperatur, welche im Wasserbade möglichst constant gehalten wurde, wurde zur Mittelbestimmung von fünf zu fünf Minuten abgelesen. Die gleichzeitig angestellten Versuche sind durch das Zeichen { hervorgehoben.

#### Wasserdampf-Wasserstoff.

Nr. des Versuchs	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	$h$ in mm	$t$ $\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$
{ 1	92,37	574,6	724,8	25	10,20
{ 2	"	"	"	47	9,26
{ 3	92,36	574,4	724,4	26	10,38
{ 4	"	"	"	47	9,20
{ 5	92,45	576,9	727,3	63	8,97
{ 6	"	"	"	106	8,55
{ 7	"	"	"	50	9,32
{ 8	"	"	"	150	8,40

In den Versuchen Nr. 1, 3, 5, 7 hatte das Verdampfungsrohr einen Durchmesser von 2,3 mm, in den übrigen Versuchen von 2,7 mm.

#### Wasserdampf-Luft.

Nr. des Versuchs	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	$h$ in mm	$t$ $\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$
{ 1	92,37	574,6	729,3	23	32,46
{ 2	"	"	"	48,5	30,43
{ 3	92,42	575,7	730,7	24	32,59
{ 4	"	"	"	44,5	30,75

Nr. des Versuchs	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	$h$ in mm	$\frac{\ell}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$
{ 5	92,97	574,6	729,3	23	32,71
{ 6	"	"	"	71	29,93
{ 7	92,41	575,5	728,8	49,5	29,92
{ 8	"	"	"	85	29,47
{ 9	92,88	574,9	730,7	44,5	30,56
{ 10	"	"	"	82	29,38

In den Versuchen Nr. 1, 3, 5, 6, 7, 9 war der Durchmesser des Wasserdampfrohres 2,3 mm, in den übrigen Versuchen 2,7 mm.

#### Wasserdampf-Kohlensäure.

Nr. des Versuchs	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	$h$ in mm	$\frac{\ell}{\frac{1}{2}(h_1 + h_0)}$
{ 1	92,40	575,3	722,4	26	45,29
{ 2	"	"	"	44,5	42,99
{ 3	92,37	574,6	724,3	26	46,02
{ 4	"	"	"	45,5	43,00
{ 5	92,38	574,9	720,9	43,5	43,88
{ 6	"	"	"	82	41,34
{ 7	92,37	574,6	724,3	45,5	42,87
{ 8	"	"	"	82	41,55

In den Versuchen Nr. 1, 3, 5, 7 war der Durchmesser des Verdampfungsrohres 2,3 mm, in den übrigen Versuchen 2,7 mm.

Die vorstehenden Versuche bestätigen das früher gefundene Resultat, dass der Quotient  $\ell/\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$  mit zunehmendem  $h$  abnimmt<sup>1)</sup>; sie zeigen aber ferner, dass diese Abnahme nicht proportional mit  $h$  erfolgt, sondern langsamer. Dies tritt noch deutlicher hervor, wenn man aus den obigen Werthen den Diffusionscoefficienten  $K$  (nach der Formel, Wied. Ann. 22. p. 20) berechnet, weil dann der Einfluss des verschiedenen Druckes und der verschiedenen Temperatur zurücktritt.

1) Um zu beweisen, dass diese Abnahme nicht etwa durch eine conische Form der Verdampfungsrohre bedingt sei, wurden von einer Röhre, in welcher die Verdampfung für  $h = 80$  mm beobachtet war, 50 mm abgeschnitten und jetzt wiederum die Verdampfung untersucht.

## Diffusionscoefficient.

Nr. des Versuchs	$\lambda$	Wasser- dampf- Wasserst.	Zuwachs pro Millim. in Proc.	$\lambda$	Wasser- dampf- Luft	Zuwachs pro Millim. in Proc.	$\lambda$	Wasserd- Kohlen- säure	Zuwachs pro Millim. in Proc.
1	25	0,972	0,436	23	0,3098	0,254	26	0,2163	0,282
2	45	1,070		48,5	0,3305		44,5	0,2279	
3	26	0,967		24	0,3086		26	0,2149	
4	47	1,076	0,509	44,5	0,3270	0,282	45,5	0,2300	0,349
5	63	1,103		23	0,3074		43,5	0,2304	
6	106	1,157	0,111	71	0,3360	0,184	82	0,2362	0,065
7	50	1,062		48,5	0,3343		45,5	0,2304	
8	150	1,178	0,104	85	0,3394	0,042	82	0,2374	0,087
9	—	—		44	0,3301		—	—	
10	—	—	—	82	0,3434	0,105	—	—	—

Für je zwei gleichzeitig beobachtete Werthe ist der Zuwachs des Diffusionscoefficienten mit wachsendem  $\lambda$  pro Millimeter in Procenten ausgedrückt, angegeben. Wie man sieht, nimmt dieser Zuwachs für alle drei Combinationen mit wachsendem  $\lambda$  ganz bedeutend ab; hierdurch ist bewiesen, dass der Diffusionscoefficient sich schnell einer bestimmten Grenze nähert. Die Grenzwerte selbst werden in den vorliegenden Versuchen nahezu erreicht.

Stellt man den Diffusionscoefficienten in seiner Abhängigkeit von  $\lambda$  durch die Formel:

$$k = a - b \cdot c^{\lambda},$$

dar, wo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  aus den Versuchen zu bestimmende Constanten sind, und  $c < 1$  ist, so wird:

$$k = a \text{ für } \lambda = \infty.$$

Es ist somit  $a$  der gesuchte Grenzwert.

Eine Vergleichung der nach obiger Formel berechneten Werthe mit den Beobachtungen liefert eine hinreichende Uebereinstimmung, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

## Wasserdampf-Wasserstoff.

$$a = 1,1794; \quad b = 0,4410; \quad \log c = 0,98701 - 1.$$

Diffusionscoefficient.

Diffusionscoefficient.

$\lambda$	ber.	beob.	Diff. in Proc.	$\lambda$	ber.	beob.	Diff. in Proc.
25	0,970	0,972	+0,2	63	1,112	1,103	-0,9
47	1,072	1,073	+0,1	106	1,161	1,157	-0,3
50	1,080	1,062	-1,8	150	1,174	1,178	+0,3



## Wasserdampf-Luft.

$$a = 0,3451; \quad b = 0,0857; \quad \log c = 0,98387 - 1.$$

Diffusionscoefficient.				Diffusionscoefficient.			
$h$	ber.	beob.	Diff. in Proc.	$h$	ber.	beob.	Diff. in Proc.
23	0,3086	0,3086	0,0	71	0,3390	0,3360	-0,9
44,5	0,3287	0,3285	-0,1	82	0,3410	0,3434	+0,7
48,5	0,3310	0,3324	+0,4	85	0,3415	0,3394	-0,6

## Wasserdampf-Kohlensäure.

$$a = 0,2984; \quad b = 0,07759; \quad \log c = 0,97871 - 1.$$

Diffusionscoefficient.				Diffusionscoefficient.			
$h$	ber.	beob.	Diff. in Proc.	$h$	ber.	beob.	Diff. in Proc.
26	0,2167	0,2156	-0,5	45,5	0,2301	0,2302	0,0
43,5	0,2292	0,2304	+0,5	82	0,2370	0,2370	0,0
44,5	0,2297	0,2279	-0,8				

Nach den vorliegenden Beobachtungen ist die Schlussfolgerung (welche schon in der Einleitung erwähnt wurde) gerechtfertigt, dass die Zunahme des Diffusionscoefficienten mit wachsendem  $h$  in der Druckänderung des Dampfes an der Oberfläche der verdampfenden Flüssigkeit begründet ist. Da bei kleinen Werthen von  $h$  die Verdampfung schnell erfolgt, so wird hier der Dampfdruck an der Oberfläche der Flüssigkeit nicht den Maximalwerth, welcher der Temperatur des Bades entspricht, und welcher in jedem Falle in die Rechnung eingeführt wurde, besitzen. Es kann dies in zwei Ursachen begründet sein: einerseits mag durch die schnelle Verdampfung eine Temperaturabnahme der verdampfenden Oberfläche bewirkt werden, und andererseits geht der Dampf so schnell von der Oberfläche fort, dass der Ersatz nicht hinreichend schnell geleistet wird. Mit dieser Erklärung steht das Verhalten der verschiedenen Combinationen im Einklang. Beim Wasserdampf-Wasserstoff, wo die schnellste Verdampfung stattfindet, ist die procentische Zunahme des Coefficienten für gleiche Werthe von  $h$  stärker, als bei den zwei anderen Combinationen; ferner wird bei der letzteren der Grenzwertb schneller erreicht. Berechnet man z. B. für  $h = 82$  mm die Diffusionscoefficienten, so erhält man:

	$h = 82$	Grenzwert	Diff. in Proc.
Wasserdampf-Wasserstoff	1,4111	1,1794	3,2
„ -Luft . . .	0,3410	0,3451	1,2
„ -Kohlensäure	0,2370	0,2384	0,5

Wie die Zahlen der letzten Spalte zeigen, ist für  $h = 82$  der Coefficient für Wasserdampf-Wasserstoff noch am weitesten (3,2 Proc.) von dem Grenzwert entfernt; der Coefficient für Wasserdampf-Kohlensäure erreicht dagegen den Grenzwert schon bis auf 0,5 Proc.

In der niedrigen Temperatur wurde die Beobachtung für verschiedene Werthe von  $h$  auf die Combination Wasserdampf-Wasserstoff beschränkt, da in den beiden anderen Gasen die Verdampfung so langsam von statten geht, dass die nothwendige Genauigkeit nicht erreicht werden kann. Die Resultate waren folgende:

## Wasserdampf-Wasserstoff.

Nr.	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	$h$ in mm	$\frac{t}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$	Diffusionscoefficient $k$	Zuwachs in Proc. pro Millim.
1 }	49,5	89,7	722,7	21	110,5	0,9804	} 0,090
2 }	„	„	„	41	108,4	0,9993	
3 }	„	„	723,3	21	109,8	0,9875	} 0,041
4 }	„	„	„	42	108,8	0,9966	

Die letzte Reihe, welche den Zuwachs der Diffusionscoefficienten mit wachsendem  $h$  pro Millimeter darstellt, zeigt in den beiden Werthen 0,090 und 0,041 einen bedeutenden Unterschied; derselbe wird indess durch kleine Differenzen in den Coefficienten, die nicht ein Procent erreichen, verursacht und ist daher nicht auffallend. Jedenfalls zeigen die Versuche, dass, entsprechend der langsameren Verdampfung, der Zuwachs von  $k$  hier viel kleiner ist, als für das gleiche  $h$  bei der höheren Temperatur. Berechnet man nach der früher angegebenen Formel, welche für die Temperatur  $92,4^\circ$  gilt, die Diffusionscoefficienten für  $h = 21$  mm und 42 mm, so erhält man 0,943 und 1,053; der Zuwachs beträgt daher pro Millimeter 0,51 Proc., während die obigen

Versuche bei  $49,5^{\circ}$  in dem gleichen Intervall im Mittel nur 0,065 Proc. zeigen. Auch dieses Resultat steht mit der früher gegebenen Erklärung der Veränderung des Coefficienten im Einklang.

Vergleicht man aber die Resultate der einzelnen Combinationen in der höheren Temperatur noch näher miteinander, so kommt man zu dem Ergebniss, dass die Schnelligkeit der Verdampfung nicht das einzige massgebende Moment für den Zuwachs des Diffusionscoefficienten ist. Unter gleichen Umständen (bei gleichem  $h$  und gleicher Temperatur) geht die Verdampfung in einer Wasserstoffatmosphäre nahezu fünfmal schneller vor sich, als in einer Kohlensäureatmosphäre. Wenn daher bloss die Schnelligkeit der Verdampfung für die Veränderung des Coefficienten von Bedeutung wäre, so müsste die Combination Wasserdampf-Wasserstoff bei fünffachem Werthe von  $h$  die gleiche Veränderung zeigen, wie Wasserdampf-Kohlensäure bei einfachem  $h$ . Dass dies nicht der Fall, ergeben die Versuche unmittelbar. Wasserdampf-Wasserstoff zeigt für  $h = 100$  mm einen Werth, welcher dem Grenzwertb viel näher steht, als der Werth von Wasserdampf-Kohlensäure für  $h = 20$  mm. Es scheint daher, dass die Natur des Gases neben der Schnelligkeit der Verdampfung einen Einfluss ausübt.

Die am Schlusse der vorigen Arbeit angegebenen Diffusionscoefficienten sind, wie schon damals als wahrscheinlich hingestellt wurde, etwas zu gross. Nimmt man in der höheren Temperatur ( $92,4^{\circ}$ ) die jetzt bestimmten Grenzwertbe, und in der tieferen Temperatur ( $49,5^{\circ}$ ) für Wasserdampf-Wasserstoff, den obigen Versuchen entsprechend, den Werth 1,000, für die beiden anderen Combinationen die direct beobachteten Werthe, so erhält man:

Diffusionscoefficient von	Temperatur	
	$92,4^{\circ}$	$49,5^{\circ}$
Wasserdampf-Wasserstoff .	1,1794	1,000
„ -Luft . . .	0,8451	0,2827
„ -Kohlensäure	0,2384	0,1811

Die Differenzen, welche diese Werthe gegenüber den früheren Bestimmungen besitzen, haben keinen Einfluss auf die Bemerkungen, die betreffs der Formel des Hrn. O. E. Meyer gemacht wurden.<sup>1)</sup> Das Verhältniss der Diffusionscoëfficienten:

	Temperatur	
	92,4°	49,5°
$\frac{H_2O - H_2}{H_2O - CO_2}$	= 4,95;	5,52
$\frac{H_2O - \text{Luft}}{H_2O - CO_2}$	= 1,45;	1,56

weicht von den nach der Meyer'schen Formel bestimmten Quotienten bedeutend ab; statt 5,52 liefert die Formel 0,82.

Der Unterschied der Quotienten für die Temperatur 92,4° und 49,5° kann möglicherweise in der Verschiedenheit der Temperaturcoëfficienten der drei Combinationen begründet sein. Wenn der Diffusionscoëfficient von  $H_2O - H_2$  schwächer mit der Temperatur wächst, als jener von  $H_2O - CO_2$ , so wird das Verhältniss beider mit wachsender Temperatur abnehmen, wie es oben in der That der Fall ist.

Die obigen Werthe gestatten eine Vergleichung mit den Resultaten, welche Hr. Guglielmo in der neuesten Zeit mitgetheilt hat. Derselbe findet bei 18°, ebenfalls aus Verdampfungsversuchen<sup>2)</sup>, für die Quotienten:

$$\frac{H_2O - H_2}{H_2O - CO_2} = 5,60; \quad \frac{H_2O - \text{Luft}}{H_2O - CO_2} = 1,59.$$

Diese Zahlen<sup>3)</sup> stimmen nahe überein mit den Werthen 5,52 und 1,56, welche von mir bei 49,5° gefunden sind.

Um die beobachteten Diffusionscoëfficienten mit der von Hrn. Stefan aufgestellten Formel zu vergleichen, wurden erstere auf 0° reducirt; zu diesem Zwecke wurde die Formel:

$$k_t = k_0 \left( \frac{273 + t}{273} \right)^2$$

1) Winkelmann, Wied. Ann. 22. p. 18. 1884.

2) Guglielmo, Beibl. 8. p. 20. 1884.

3) Frühere Versuche des Hrn. Guglielmo (Beibl. 6. p. 477. 1882) welche nicht so genau zu sein scheinen, haben bei 15°, statt der obigen Zahlen, 6,29, resp. 1,71 ergeben.

verwendet. Man erhält:

	Diffusionscoefficient bei 0° berechnet aus dem Werthe		Diff. in Proc.
	bei 92,4°	bei 49,5°	
Wasserdampf-Wasserstoff	0,658	0,716	8,5
„ -Luft . . .	0,193	0,203	5,0
„ -Kohlensäure	0,133	0,130	-2,3

Setzt man für die moleculare Weglänge<sup>1)</sup>:

Wasserdampf . . .	63,3 . 10 <sup>-7</sup> cm
Wasserstoff . . .	176,5 „ „
Luft . . .	95,0 „ „
Kohlensäure . . .	64,6 „ „

so erhält man nach der Stefan'schen Formel:

$$k = \frac{3\pi \cdot \sqrt{2}}{8} \cdot \omega \cdot \sqrt{m} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)^2}$$

für die Diffusionscoefficienten:

Wasserdampf-Wasserstoff .	0,738
„ -Luft . . .	0,230
„ -Kohlensäure .	0,179

Die Werthe sind sämmtlich grösser als die beobachteten.

Legt man dagegen die kleineren Zahlen zu Grunde, welche Hr. Puluj<sup>2)</sup> für die Weglänge angibt:

Wasserdampf . . .	58 . 10 <sup>-7</sup> cm
Wasserstoff . . .	151 „ „
Luft . . .	82 „ „

so findet man:

	Diffusionscoefficient
Wasserdampf-Wasserstoff . .	0,652
„ -Luft . . .	0,203

Um die Weglänge der Kohlensäure aus der Puluj'schen Angabe zu erhalten, wurde der Reibungscoefficient der Kohlensäure, bezogen auf Luft als Einheit, 0,806 gesetzt<sup>3)</sup>; man erhält so 54 . 10<sup>-7</sup>. Der Diffusionscoefficient nach der Stefan'schen Formel wird dann für:

Wasserdampf-Kohlensäure 0,155.

1) Winkelmann, Wied. Ann. 22. p. 16. 1884.

2) Puluj, Beibl. 3. p. 468. 1879.

3) Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 540. 1875.

Nach dieser Berechnung stimmen die theoretischen Werthe für Wasserdampf-Wasserstoff und Wasserdampf-Luft nahe mit den Beobachtungen überein; nur Wasserdampf-Kohlensäure zeigt noch eine grössere Differenz.

Hohenheim, März 1884.

### III. *Kritisches zur Theorie der Polarisation des gebeugten Lichtes;*<sup>1)</sup> von J. Fröhlich in Budapest.

1. Bisherige Arbeiten. — 2. Unzureichende Entwicklungen. — 3. Gleichungen der Lichtbewegung. — 4. Wellenfunctionen an der Beugungsfläche und im gebeugten Licht. — 5. Die von Réthy und W. König benutzten zwei Lösungen. — 6. Ausdrücke der Elongation in beiden Systemen. — 7. Anwendung derselben auf ebene Erscheinungen. — 8. Herleitung der Réthy'schen und W. König'schen Formeln, Vergleichung mit der Erfahrung; Widerspruch. — 9. Drittes System von Lösungen. — 10. Ausdrücke der Elongationen. — 11. Anwendung derselben auf ebene Erscheinungen; Möglichkeit der Beschreibung. — 12. Vereinfachung der Ausdrücke. — 13. Rückblick und Schlussbemerkung.

#### § 1. Uebersicht der bisherigen Arbeiten.

Der Polarisationszustand, welchen das durch ein Gitter hindurch gehende oder von einem solchen Gitter reflectirte und gebeugte, im allgemeinen geradlinig polarisirte Licht erfahrungsgemäss zeigt<sup>2)</sup>, wurde zuerst von Réthy mittels Kugellinien einfacher Art erklärt.

Réthy<sup>3)</sup> geht von der Elasticitätstheorie des Lichtes aus, legt die für den unendlichen, homogenen Raum geltenden Bewegungsgleichungen des Aethers zu Grunde und betrachtet insbesondere zwei von Kirchhoff herrührende einfache Lösungen derselben, leitet aus ihnen zwei Formeln für das Amplitudenverhältniss des in der Ebene gebeugten, linear polarisirten Lichtes ab und weist mittels nume-

1) Gelesen in der Sitzung der Ung. Akademie vom 21. April 1884.

2) Fröhlich, Wied. Ann. 1. p. 321. 1877.

3) Réthy, Wied. Ann. 11. p. 504. 1880.

rischer Vergleichung eine genügende Uebereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie nach.

Diese Betrachtungsweise wurde vor kurzem von W. König auf die Polarisation des von Lamellengittern reflectirten und gebeugten Lichtes angewendet, welches elliptische Polarisation von grosser Regelmässigkeit zeigt.<sup>3)</sup>

Indem W. König die von Réthy benutzten Lösungen mit constanten Anfangsphasen ergänzt, bildet er aus denselben eine Formel für die Phasendifferenz des in der Ebene gebeugten, elliptisch polarisirten Lichtes, mittels welcher seine diesbezüglichen Beobachtungen in genügender Weise dargestellt werden.

Man kann daher sagen, die obigen Arbeiten erweisen, für den Fall einer Beugung, dass in Bezug auf das Amplitudenverhältniss des geradlinig polarisirten Lichtes und auf die Phasendifferenz des elliptisch polarisirten Lichtes eine vollkommen genügende Uebereinstimmung der Réthy-Kirchhoff'schen Formeln mit der Erfahrung stattfindet.

Es muss indess hervorgehoben werden, dass die Wirkung der Beugung auf Phase und Amplitude bei Bildung des Amplitudenverhältnisses für das linear polarisirte Licht (Réthy), und bei Bildung der Phasendifferenz für das elliptisch polarisirte Licht (W. König) von selbst aus der Rechnung fortfällt.

## § 2. Diese Entwicklungen sind unzureichend.

Man findet aber ein wesentlich anderes Resultat, wenn man die Eigenschaften der beiden Componenten des gebeugten Lichtes, nämlich die zur Einfallsebene parallele und die darauf senkrechte Schwingungscomponente einzeln, gesondert untersucht und mit den von Réthy und W. König benutzten Lösungen vergleicht; es zeigt sich nämlich, dass bei einer solchen Vergleichung die zwei Systeme der Lösung mit der Erfahrung im grössten Widerspruche sind.

Will man nun die für den unbegrenzten Raum geltenden Gleichungen zum Ausgangspunkt nehmen, so folgt daraus die Nothwendigkeit der Aufstellung einer solchen Lö-

1) W. König, Wied. Ann. 17. p. 1016. 1862.



sung, die nicht nur das Amplitudenverhältniss oder die Phasendifferenz, sondern auch das Verhalten der einzelnen Componenten wiedergibt.

Im Folgenden wollen wir vorerst erweisen, dass die von Réthy und W. König benutzten Lösungssysteme nur einen Theil des Polarisationszustandes des gebeugten Lichtes darstellen, hingegen mit einem anderen Theil desselben in vollem Widerspruch sind.

Hierauf soll aus den, für den unbegrenzten elastischen Raum geltenden Bewegungsgleichungen mittels der beiden obigen Lösungen ein anderes gebildet werden, das geeignet ist, diesen Polarisationszustand vollständig wiederzugeben.

Anmerkung. Wie man aus einem bekannten Lösungssystem ein anderes, allgemeineres System bilden kann, zeigten Fröhlich<sup>1)</sup> Réthy<sup>2)</sup> und Kirchhoff.<sup>3)</sup>

§ 3. Gleichungen der Lichtbewegung im homogenen, unendlichen, elastischen Raume.

Bezeichnet man, wie gebräuchlich, mit  $u, v, w$  die Componenten der Elongation eines Theilchens, das in der Ruhelage die Coordinaten  $x, y, z$  hat, so gilt für transversale Schwingungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v, & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Nach Clebsch lassen sich die Lösungen dieser Gleichungen schreiben:

$$(2) \quad u = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x};$$

hier bedeuten  $U, V, W$  Wellenfunctionen, die ebenso wie  $u, v, w$  der typischen Gleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

Genüge leisten.

1) Fröhlich, Wied. Ann. 6. p. 422. Anmerkung. 1879.

2) Réthy, Wied. Ann. 11. p. 507. 1880.

3) Kirchhoff, Sitzungsber. der Berl. Acad. Math. Phys. Classe vom 22. Juni 1882 p. 643.

Sollen die Lösungen Schwingungen von homogenem (einfarbigem) Licht darstellen, so müssen die sechs Functionen  $u, \dots, W$  noch der charakteristischen Gleichung der Periodicität:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \varphi, \quad \text{oder:}$$

$$(5) \quad \Delta \varphi = -k^2 \varphi$$

genügen, wobei:

$$(6) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und  $T$ ,  $\lambda$  die Periode, bez. Wellenlänge der Schwingung bedeutet.

#### § 4. Wellenfunctionen an der Beugungsfläche und im gebeugten Lichte.

Im Folgenden bezeichne  $U, V, W$  die Wellenfunctionen an der Beugungsfläche,  $U_0, V_0, W_0$  dieselben im gebeugten Lichte, ferner  $x_1, y_1, z_1, x, y, z, x_0, y_0, z_0$  die Coordinaten der Lichtquelle, eines beliebigen Punktes der Beugungsfläche und eines beliebigen Punktes im gebeugten Lichte, schliesslich  $r_1$  und  $r_0$  die Entfernung des Flächenpunktes  $(xyz)$  vom Punkte  $(x_1 y_1 z_1)$  und  $(x_0 y_0 z_0)$ ,  $df$  das Element der Beugungsfläche.

Wir wählen nun für die Wellenfunctionen an der Beugungsfläche die folgenden einfachsten Ausdrücke:

$$(7) \quad \begin{cases} U = \frac{A}{r_1} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \alpha \right], \\ V = \frac{B}{r_1} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \beta \right], \\ W = \frac{I}{r} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \gamma \right], \end{cases}$$

Der allgemeinen Beugungstheorie zufolge sind die Wellenfunctionen im gebeugten Lichte die folgenden:

$$(8) \quad U_0 = \frac{A}{2\lambda r_1 r_0} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \int \sin \left[ 2\pi \left( \frac{r_0 + r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \alpha \right] df. ^1)$$

1) Kirchhoff, Sitzungsber. d. Berl. Acad. Math.-Phys. Classe vom 22. Juni 1882, p. 663 u. 664.

Die Werthe von  $V_0$  und  $W_0$  finden sich durch cykliche Vertauschung von  $A$  und  $a$ ; alle drei Functionen genügen den Gleichungen (3), (4), (5).

Es bedeuten dabei  $\partial r_1 / \partial N$  und  $\partial r_0 / \partial N$  die Cosinus der Winkel, die zwischen der positiven Normale  $N$  des Elementes  $df$  und den positiven Richtungen von  $r_1$  und  $r_0$  liegen; ferner wurde die beugende Fläche als eine Ebene vorausgesetzt.

Wir setzen nun zur Abkürzung:

$$(9) \quad \begin{cases} A = \frac{A}{2\lambda r_1}, & B = \frac{B}{2\lambda r_1}, & C = \frac{F}{2\lambda r_1}, \\ c = \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \int \cos \left[ 2\pi \frac{r_0 + r_1}{\lambda} \right] df, \\ s = \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \int \sin \left[ 2\pi \frac{r_0 + r_1}{\lambda} \right] df, & \vartheta = 2\pi \frac{t}{T}, \end{cases}$$

es wird aus (8):

$$(10) \quad \begin{cases} U_0 = \frac{A}{r_0} \{ s \cos(\vartheta + \alpha) - c \sin(\vartheta + \alpha) \}, \\ V_0 = \frac{B}{r_0} \{ s \cos(\vartheta + \beta) - c \sin(\vartheta + \beta) \}, \\ W_0 = \frac{C}{r_0} \{ s \cos(\vartheta + \gamma) - c \sin(\vartheta + \gamma) \}. \end{cases}$$

Um diese Ausdrücke zu vereinfachen, führen wir ein:

$$(11) \quad \begin{cases} c = J \sin \omega, & \begin{cases} J^2 = c^2 + s^2, \\ \operatorname{tg} \omega = \frac{c}{s}, \end{cases} \\ s = J \cos \omega, \end{cases}$$

und es wird:

$$(12) \quad \begin{cases} U_0 = \frac{A}{r_0} J \cos(\vartheta + \omega + \alpha), & V_0 = \frac{B}{r_0} J \cos(\vartheta + \omega + \beta), \\ W_0 = \frac{C}{r_0} J \cos(\vartheta + \omega + \gamma). \end{cases}$$

Es bildet nun dieses System von Wellenfunctionen im gebeugten Lichte den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen.

Anmerkung. Wenn die Functionen  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $W_0$  nach den Coordinaten  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  differentiirt werden, so können alle die Glieder vernachlässigt werden, die  $r_0$  im Nenner in einer höheren als der ersten Potenz enthalten; es bleiben dann nur die von  $c$  und  $s$  herrührenden Glieder.

Man hat so z. B.:

$$(13) \quad \frac{\partial c}{\partial x_0} = \frac{dc}{dr_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial x_0} = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial x_0} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \int \sin \left[ 2\pi \cdot \frac{r_0 + r_1}{\lambda} \right] df.$$

u. s. f.

Bedeutet nun  $a, b, c$  die Richtungswinkel des gebeugten Strahles  $r_0$ , so wird:

$$(14) \quad \frac{\partial r_0}{\partial x_0} = \cos a, \quad \frac{\partial r_0}{\partial y_0} = \cos b, \quad \frac{\partial r_0}{\partial z_0} = \cos c,$$

und nach (6), (9) und (13):

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x_0} = -sk \cos a, & \frac{\partial c}{\partial y_0} = -sk \cos b, & \frac{\partial c}{\partial z_0} = -sk \cos c \\ \frac{\partial s}{\partial x_0} = +ck \cos a, & \frac{\partial s}{\partial y_0} = +ck \cos b, & \frac{\partial s}{\partial z_0} = +ck \cos c \end{cases}$$

§ 5. Die von Réthy und W. König benutzten zwei charakteristischen, particularen Lösungen.

I. Réthy's erstes System finden wir aus (12), wenn wir für die Elongationen im gebeugten Lichte setzen:

$$(16) \quad u = \frac{\partial V_0}{\partial x_0} - \frac{\partial W_0}{\partial y_0}, \quad v = \frac{\partial W_0}{\partial x_0} - \frac{\partial U_0}{\partial z_0}, \quad w = \frac{\partial U_0}{\partial y_0} - \frac{\partial V_0}{\partial z_0}.$$

Diese Werthe von  $u, v, w$  leisten den Gleichungen (1) und (5) Genüge.

II. Réthy's zweites System finden wir aus dem ersten, wenn wir für die Elongationen aus (16) setzen:

$$(17) \quad u' = \frac{\partial v}{\partial x_0} - \frac{\partial w}{\partial y_0}, \quad v' = \frac{\partial w}{\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial z_0}, \quad w' = \frac{\partial u}{\partial y_0} - \frac{\partial v}{\partial z_0}$$

das ist:

$$(17_a) \quad u' = \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \frac{\partial V_0}{\partial y_0} + \frac{\partial W_0}{\partial z_0} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 U_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z_0^2} \right\} \text{ u. s. f.}$$

Anmerkung. Wenn man diesen Vorgang fortsetzt und das so entstehende System schreibt:

$$(17_b) \quad u'' = \frac{\partial v'}{\partial x_0} - \frac{\partial w'}{\partial y_0}, \quad v'' = \frac{\partial w'}{\partial x_0} - \frac{\partial u'}{\partial z_0}, \quad w'' = \frac{\partial u'}{\partial y_0} - \frac{\partial v'}{\partial z_0},$$

so kann dies, nach vollzogener Substitution aus (17<sub>a</sub>) geschrieben werden:

$$u'' = -\frac{\partial}{\partial x_0} (\Delta V_0) + \frac{\partial}{\partial y_0} (\Delta W_0),$$

aber es ist nach Gleichung (5):  $\Delta U_0 = -k^2 U_0$ , u. s. f., so dass, mit Berücksichtigung der Gleichungen (16):

(17<sub>a</sub>)  $u'' = k^2 u, \quad v'' = k^2 v, \quad w'' = k^2 w,$   
 und diese Elongationen stimmen der Form nach mit denen  
 des ersten Systemes, (16), gänzlich überein, da  $k^2$  nur eine  
 Constante ist.

Man ersieht daraus, dass die Fortsetzung des obigen  
 Vorganges keinen neuen Typus liefert, sondern nur ab-  
 wechselnd das erste und zweite System gibt.

§ 6. Explicite Ausdrücke der Elongationen im ersten und  
 zweiten System.

Man berechne die Ausdrücke (16) und (17) aus den Glei-  
 chungen (10) und vernachlässige dabei die Glieder, welche  $r_0$   
 im Nenner enthalten, gegen diejenigen, die  $\lambda$  im Nenner  
 haben, ausserdem setzen wir zur Vereinfachung, nach voll-  
 zogener Rechnung überall  $r_0 = 1$ .

I. Für das erste System findet man mit Benutzung  
 der Abkürzungen unter (11):

$$u = Jk \{ B \cos c \sin(\vartheta + \omega + \beta) - C \cos b \sin(\vartheta + \omega + \gamma) \}$$

u. s. f. In die gewöhnliche Form einfach harmonischer  
 Schwingungen gebracht, hat man:

$$(18) \quad \begin{cases} u = J\mathfrak{A} \sin(\vartheta + \omega + \varphi), & v = J\mathfrak{B} \sin(\vartheta + \omega + \chi) \\ w = J\mathfrak{C} \sin(\vartheta + \omega + \psi); \end{cases}$$

dabei ist:

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{1}{k^2} \mathfrak{A}^2 = B^2 \cos^2 c + C^2 \cos^2 b - 2BC \cos(\beta - \gamma) \cos b \cos c \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{B \sin \beta \cos c - C \sin \gamma \cos b}{B \cos \beta \cos c - C \cos \gamma \cos b}, \end{cases}$$

während die Werthe von  $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \chi, \psi$  aus (19) durch cyklische  
 Vertauschung der Buchstaben folgen.

II. Für das zweite System findet man, mit Benutzung  
 der Abkürzungen unter (11):

$$u' = Jk^2 \{ A(1 - \cos^2 a) \cos(\vartheta + \omega + \alpha) - \cos a [B \cos b \cos(\vartheta + \omega + \beta) + C \cos c \cos(\vartheta + \omega + \gamma)] \}$$

u. s. f. Auch diese Ausdrücke, in die Form gewöhnlicher  
 einfach harmonischer Schwingungen gebracht, werden:

$$(20) \quad \begin{cases} u' = J\mathfrak{A}' \cos(\vartheta + \omega + \varphi'), & v' = J\mathfrak{B}' \cos(\vartheta + \omega + \chi') \\ w' = J\mathfrak{C}' \cos(\vartheta + \omega + \psi'), \end{cases}$$

dabei ist:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{k^2} \mathfrak{A}^2 &= A^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha [B^2 \cos^2 \beta + C^2 \cos^2 \gamma \\ &\quad + 2BC \cos(\beta - \gamma) \cos \beta \cos \gamma] \\ -2A \sin^2 \alpha \cos \alpha &[B \cos(\alpha - \beta) \cos \beta + C \cos(\gamma - \alpha) \cos \gamma] \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \frac{A \sin \alpha \sin^2 \alpha - \cos \alpha (B \sin \beta \cos \beta + C \sin \gamma \cos \gamma)}{A \cos \alpha \sin^2 \alpha - \cos \alpha (B \cos \beta \cos \beta + C \cos \gamma \cos \gamma)}, \end{aligned} \right.$$

während die Werthe von  $\mathfrak{B}'$ ,  $\mathfrak{C}'$ ,  $\chi'$ ,  $\psi'$  aus (21) ebenfalls durch cyklische Vertauschung der Buchstaben folgen.

Die Ausdrücke (18) und (20) der Elongationen stellen einfache, harmonische Schwingungen dar, deren Phasen und Amplituden in der durch die Gleichungen (19) und (21) charakterisirten Weise von den Richtungswinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  des gebeugten Strahles  $r_0$  abhängen.

Dabei ist selbstverständlich, dass die Constanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in den beiden Systemen verschiedene Werthe haben können.

Man kann die Ausdrücke (18) bis (21) unmittelbar auf solche Beugungserscheinungen anwenden, bei welchen die gebeugten Strahlen im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, wie dies etwa bei solchen Erscheinungen der Fall ist, die mittels gekreuzter Gitter, oder Kreisgitter erzeugt werden, oder auch auf solche Art, dass man auf ein gewöhnliches optisches Gitter ein Lichtbündel in solcher Richtung fallen lässt, die nicht in der zur Furchenrichtung senkrechten Ebene liegt.

#### § 7. Anwendung des ersten und zweiten Systemes auf Erscheinungen, die in einer Ebene liegen.

Es sei die  $XZ$ -Ebene zugleich die Beugungsebene; dann gilt für jeden Strahl:

$$(22) \quad \cos \beta = 0; \quad \cos \gamma = \sin \alpha.$$

I. Dann wird aus den charakteristischen Bestimmungsstücken des ersten Systemes, (19):

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}^2 &= k^2 B^2 \sin^2 \alpha; \\ \mathfrak{B}^2 &= k^2 [A^2 \sin^2 \alpha + C^2 \cos^2 \alpha - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin \alpha \cos \alpha]; \\ \mathfrak{C}^2 &= k^2 B^2 \cos^2 \alpha, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \beta; \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{A \sin \alpha \sin \alpha - C \sin \gamma \cos \alpha}{A \cos \alpha \sin \alpha - C \cos \gamma \cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \right.$$

II. Die Bestimmungsstücke des zweiten Systemes werden:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A'^2}{\sin^2 a} = \frac{B'^2}{\cos^2 a} \\ = k^4 [A^2 \sin^2 a + C^2 \cos^2 a - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin a \cos a]; \\ B'^2 = k^4 B^2 \\ \operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \psi' = \frac{A \sin \alpha \sin a - C \sin \gamma \cos a}{A \cos \alpha \sin a - C \cos \gamma \cos a}, \quad \operatorname{tg} \chi' = \operatorname{tg} \beta. \end{array} \right.$$

Man bemerkt sofort, dass hier:

$$(24_a) \quad \operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \psi', \text{ und } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \chi'.$$

Die Bewegung, deren Amplituden und Phasen (23) und (24) darstellen, hängt einzig und allein vom Winkel  $a$  ab, den der gebeugte Strahl  $r_0$  mit der zur Furchenrichtung senkrechten  $X$ -Achse einschliesst. Man bemerkt auch, dass in beiden Systemen (23) und (24) die in der Beugungsebene liegenden zwei Componenten  $u$  und  $w$ , bezüglich  $u'$  und  $w'$  dieselben, oder doch nur um ganze Vielfache von  $\pi$  verschiedene Phasen  $\varphi, \varphi'; \psi, \psi'$  besitzen, (24<sub>a</sub>), sodass  $\varphi = \psi + n\pi$ ;  $\varphi' = \psi' + n'\pi$ ; demnach lassen sich aus ihnen mittels (18) und (20) sofort die in der Einfallsebene liegenden, resultirenden Componenten  $(u^2 + w^2)^{1/2}$ ,  $(u'^2 + w'^2)^{1/2}$  bilden, während  $v$  und  $v'$  die auf dieser Ebene senkrechten Componenten sind. Indem wir auf solche Weise die Schwingungen auf je zwei Componenten (nämlich in der Einfallsebene liegenden und darauf senkrechten) reduciren, findet man:

I. Für die Componenten der Schwingung im ersten Systeme:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u^2 + w^2)^{1/2} = Jk B \sin(\vartheta + \omega + \beta) \\ v = Jk [A^2 \sin^2 a + C^2 \cos^2 a \\ - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin a \cos a]^{1/2} \sin(\vartheta + \omega + \chi). \end{array} \right.$$

II. Für die Componenten der Schwingung im zweiten Systeme:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u'^2 + w'^2)^{1/2} = Jk^2 [A^2 \sin^2 a + C^2 \cos^2 a \\ - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin a \cos a]^{1/2} \cos(\vartheta + \omega + \chi) \\ v' = Jk^2 B \cos(\vartheta + \omega + \beta). \end{array} \right.$$

Die so dargestellten zwei Gruppen zeigen sehr charakteristisch den verschiedenen Typus der beiden Lösungen. Man findet nämlich unmittelbar, dass



1) das Amplitudenverhältniss im ersten Systeme dem reciproken Werthe desselben Verhältnisses im zweiten Systeme gleich sei,

2) die Phasendifferenz der beiden Componenten haben in beiden Systemen denselben Werth, aber entgegengesetztes Vorzeichen.

Dies ist dasjenige Amplitudenverhältniss und diejenige Phasendifferenz, von welcher wir im § 1 erwähnten, dass sie mit der Erfahrung übereinstimmen; letzteres soll auch sofort erwiesen werden.

§ 8. Herleitung und Vergleichung mit der Erfahrung der Réthy'schen und W. König'schen Formeln; Widerspruch.

Wir verlegen die positive  $X$ -Axe in die Richtung des ungebeugten (d. i. des direct hindurchgehenden oder direct reflectirten) Strahles  $r_1$ ; dann bedeutet  $\alpha$  den zwischen dem ungebeugten und dem beliebigen gebeugten Strahle  $r_0$  liegenden Beugungswinkel.

I. Wählen wir alle Anfangsphasen gleich, so ist:

$$(27) \quad \alpha = \beta = \gamma,$$

und dies führt auf linear polarisirtes Licht.

Bezeichnet  $\eta$  und  $\eta'$  das Polarisationsazimuth dieses Lichtes (gerechnet von der Normale der Beugungsebene) im ersten und zweiten Systeme, so wird das Amplitudenverhältniss aus (25) und (26):

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \eta \\ \operatorname{cotg} \eta' \end{array} \right\} = \frac{A}{B} \sin \alpha - \frac{C}{B} \cos \alpha,$$

oder, wenn  $\eta_0$  und  $\eta'_0$  die Werthe von  $\eta$  und  $\eta'$  bei  $\alpha = 0$ , d. i. für den ungebeugten Strahl bezeichnen:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{aus dem ersten Systeme} \dots \operatorname{tg} \eta = \frac{A}{B} \sin \alpha + \operatorname{tg} \eta_0 \cos \alpha \\ \text{aus dem zweiten Systeme} \dots \operatorname{cotg} \eta' = \frac{A}{B} \sin \alpha + \operatorname{cotg} \eta'_0 \cos \alpha. \end{array} \right.$$

Dies sind die beiden von Réthy benutzten Formeln<sup>1)</sup>, die mit der Erfahrung genügend übereinstimmen.

1) Réthy, l. c. p. 509. 510. (5). (4).

II. Bleiben die Anfangsphasen verschieden, so führt dies zu elliptisch polarisirtem Lichte, und man findet aus (25) und (26) das Amplitudenverhältniss, hingegen aus (23) und (24) die Phasendifferenz für beide Systeme:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{cotg} \eta'} &= \frac{1}{B} [A^2 \sin^2 \alpha + C^2 \cos^2 \alpha - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin \alpha \cos \alpha]^{1/2} \\ \operatorname{tg}(\chi - \beta) &= \frac{A \sin(\alpha - \beta) \sin \alpha + C \sin(\beta - \gamma) \cos \alpha}{A \cos(\alpha - \beta) \sin \alpha - C \cos(\beta - \gamma) \cos \alpha} = -\operatorname{tg}(\beta - \chi). \end{aligned} \right.$$

Dies sind die von W. König benutzten Formeln<sup>1)</sup>; die letztere stimmt mit seinen Beobachtungen genügend überein.

Aber ein Blick auf die Gleichungen (25) und (26) lehrt, dass im ersten Systeme die in der Beugungsebene liegende Componente  $(u^2 + w^2)^{1/2}$  die Amplitude  $JkB$  und die Phase  $(\vartheta + \omega + \beta)$  hat; genau dieselben Bestimmungsstücke besitzt im zweiten Systeme die zur Beugungsebene senkrechte Componente  $v'$  mit der Bemerkung, dass zu deren Amplitude der Factor  $k$  tritt. Diese Amplituden und Phasen hängen daher nur insofern von der Richtung  $\alpha$  des gebeugten Strahles ab, als nach den Gleichungen (9) und (11) die Grössen  $J$  und  $\omega$ , die Charakteristika der Beugung, Functionen von  $\alpha$  sind, die für jede beugende Oeffnung leicht berechenbar und daher als bekannt anzusehen sind.

Aber gerade diese Verhältnisse stehen mit der Erfahrung in vollem Widerspruch.

Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir nur den einfachsten Fall, wenn solches Licht, das entweder nur parallel oder nur senkrecht zur Beugungsebene polarisirt ist, senkrecht auf die Gitterfläche einfällt.

Es ist dann in Gleichung (9)  $\partial r_1 / \partial N = 1$ , und ist der Werth von  $J$  nach den Formeln (9) und (11) für symmetrisch zur Gitternormale liegende, gebeugte Strahlen derselbe.

Man kann demnach sagen, dass dann, zuzuge der bisher entwickelten Formeln, nach den Gleichungen (25) und (26) die Intensität des gebeugten Lichtes dieselbe sein soll, bei symmetrisch zu beiden Seiten der Gitternormale liegenden gebeugten Strahlen:

1) für Licht, das parallel zur Einfallsebene polarisirt

1) W. König, l. c. p. 1090. (I). (II). (III).

ist, wenn die Bewegung nach dem ersten System, Gleichung (25) geschehen würde,

2) für Licht, das senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, wenn die Bewegung nach dem zweiten Systeme, Gleichung (26) geschehen würde.

Dem ist aber durchaus nicht so, wie dies directe Beobachtungen ergeben, und zwar besonders bei Erscheinungen, die mittels Metallgitter hervorgerufen werden, und wo der Unterschied das Sechs- bis Achtfache des ganzen Werthes beträgt.<sup>1)</sup>

Man kann demnach die von Réthy und W. König benutzten Formeln wohl als solche gelten lassen, die einen beschränkten Theil der Eigenschaften des gebeugten Lichtes genähert wiedergeben; keinesfalls aber kann man denselben, bei dem gegenwärtigen Stande unserer Erfahrung eine tiefere, sondern nur rein empirische Bedeutung zuschreiben, da sie nicht im Stande sind, wesentliche Eigenschaften der Amplitude und Phase, das ist den vollständigen Polarisationszustand des gebeugten Lichtes wiederzugeben.

Ein derartiger theoretischer Versuch, dies unter der Voraussetzung zu thun, dass die Bewegung der Theilchen an der beugenden Oeffnung verschieden ist, geschah in der letzten Zeit.<sup>2)</sup>

#### §. 9. Dritte charakteristische particulare Lösung.

Die bisher betrachteten zwei Systeme von Lösungen, nämlich  $u, v, w$ ;  $u', v', w'$  leisten den Bedingungen des §. 3 selbst dann noch Genüge, wenn die Constanten  $A, B, I$ , bezüglich  $A, B, C$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  in den beiden Systemen von verschiedenem Werthe sind.

Es sollen im Folgenden die zum ersten und zum zweiten Systeme gehörigen Constanten mittels der Indices  $_1$  und  $_2$  unterschieden werden, während die zugehörigen Wellenfunktionen im gebeugten Lichte durch  $U_0, V_0, W_0$ ;  $U_0, V_0, W_0$  und die Elongationen durch  $u_1, v_1, w_1$ ;  $u_2, v_2, w_2$  bezeichnet werden.

1) Fröhlich, Wied. Ann. 15. p. 587—589. 1882.

2) Fröhlich, l. p. 596.

Es wird demnach aus den Gleichungen (12):

$$(30_a) \left\{ \begin{aligned} U_0 &= \frac{A_1 J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \alpha_1), \\ V_0 &= \frac{B_1 J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \beta_1), \\ W_0 &= \frac{C_1 J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \gamma_1). \end{aligned} \right. \quad (30_b) \left\{ \begin{aligned} U_0 &= \frac{A_2 J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \alpha_2), \\ V_0 &= \frac{B_2 J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \beta_2), \\ W_0 &= \frac{C_2 J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \gamma_2). \end{aligned} \right.$$

ferner aus Formeln (16) und (17<sub>a</sub>):

$$(31) \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial V_0}{\partial z_0} - \frac{\partial W_0}{\partial y_0}, \text{ u. s. f.} \\ u_2 &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \frac{\partial V_0}{\partial y_0} + \frac{\partial W_0}{\partial z_0} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 U_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z_0^2} \right\}, \text{ u. s. f.} \end{aligned} \right.$$

Aus diesen beiden Systemen bilden wir durch Addition ein anderes, allgemeines und ebenfalls charakteristisches System einer particularen Lösung, das wir drittes System nennen, und dessen zugehörige Elongationen wir mit  $u_3$ ,  $v_3$ ,  $w_3$  bezeichnen.

Wir setzen für diese:

$$(32) \quad u_3 = u_1 + \frac{1}{k} u_2', \quad v_3 = v_1 + \frac{1}{k} v_2', \quad w_3 = w_1 + \frac{1}{k} w_2'$$

und bemerken sofort, dass  $u_3$ ,  $v_3$ ,  $w_3$  den Bedingungen des § 3 vollständig entsprechen.

Anmerkung. Es lässt sich hier leicht zeigen, dass die Fortsetzung des in § 5 angewandten Vorganges zur Bildung der Elongation hier zu keinem neuen Typus führt.

Setzt man nämlich:

$$u_4 = \frac{\partial v_3}{\partial z_0} - \frac{\partial w_3}{\partial y_0} = \frac{\partial v_1}{\partial z_0} - \frac{\partial w_1}{\partial y_0} + \frac{1}{k} \left( \frac{\partial v_2'}{\partial z_0} - \frac{\partial w_2'}{\partial y_0} \right)$$

und beachtet die Formeln (17) und (17<sub>b</sub>) des § 5, so findet man:

$$u_4 = u_1' + \frac{1}{k} u_2'',$$

oder nach Formel (17<sub>c</sub>):

$$u_4 = u_1' + k u_3,$$

schliesslich:

$$(33) \quad \frac{1}{k} u_4 = u_3 + \frac{1}{k} u_1'.$$

Dieser Ausdruck stimmt der Form nach gänzlich überein mit Formel (32):  $u_3 = u_1 + (1/k) u_2'$ ; der einzige, aber unwesent-

liche Unterschied zwischen  $u_3$  und  $(1/k)u_4$  ist der, dass die Constanten  $A_1, \dots, \gamma_1$  und  $A_2, \dots, \gamma_2$  ihre Plätze gegenseitig vertauschen.

Würde man z. B.  $u_3$  und  $(1/k)u_4$  so combiniren, dass man setzte:

$$u_3 + \frac{1}{k} u_4 = (u_1 + u_2) + \frac{1}{k} (u_1' + u_2'),$$

so sieht man sogleich, dass dies dieselbe Form ist, wie Formel (32). Man findet daher auf diesem Wege nichts Neues.

Es bleibt nun noch zu erweisen, dass dieses dritte charakteristische System zu solchen Formeln führt, die zur Darstellung der Erfahrung vollkommen geeignet sind.

#### § 10. Explicite Ausdrücke der Elongationen im dritten System.

Nach § 6 sind die einzelnen Componenten der Elongationen:

$$u_1 = Jk \{ B_1 \cos c \cos (\vartheta + \omega + \beta_1) - C_1 \cos b \sin (\vartheta + \omega + \gamma_1),$$

$$\frac{1}{k} u_2' = Jk \{ A_2 (1 - \cos^2 a) \cos (\vartheta + \omega + \alpha_2)$$

$$- \cos a [ B_2 \cos b \cos (\vartheta + \omega + \beta_2) + C_2 \cos c \cos (\vartheta + \omega + \gamma_2) ] \}$$

u. s. f. Bildet man aus diesen nach dem Schema (32)  $u_3 = u_1 + (1/k)u_2'$  die Elongationen  $u_3, v_3, w_3$  und bringt sie in die Form einfacher harmonischer Schwingungen, so entsteht:

$$(34) \begin{cases} u_3 = J\mathfrak{U}_3 \cos (\vartheta + \omega + \varphi_3), & v_3 = J\mathfrak{V}_3 \cos (\vartheta + \omega + \chi_3), \\ w_3 = J\mathfrak{W}_3 \cos (\vartheta + \omega + \psi_3), \end{cases}$$

und es sind die Werthe der Amplituden und der Phasen:

$$(35) \begin{cases} \frac{1}{k^2} \mathfrak{U}_3^2 = A_1^2 \sin^2 a + B_1^2 \cos^2 c + C_1^2 \cos^2 b + \cos^2 a (B_2^2 \cos^2 b + C_2^2 \cos^2 c) \\ - 2 \sin^2 a \{ A_2 B_1 \sin (\alpha_2 - \beta_1) \cos c + A_2 C_1 \sin (\gamma_1 - \alpha_2) \cos b \\ + \cos a (A_2 B_2 \cos (\alpha_2 - \beta_2) \cos b + A_2 C_2 \cos (\gamma_2 - \alpha_2) \cos c) \} \\ - 2 \cos a \{ B_1 B_2 \sin (\beta_1 - \beta_2) \cos b \cos c + B_1 C_2 \sin (\beta_1 - \gamma_2) \cos^2 c \\ + B_2 C_1 \sin (\beta_2 - \gamma_1) \cos^2 b + B_2 C_2 \cos (\beta_2 - \gamma_2) \cos a \cos b \\ - C_1 C_2 \sin (\gamma_1 - \gamma_2) \cos b \cos c \} - 2 B_1 C_1 \cos (\beta_1 - \gamma_1) \cos b \cos c, \\ - A_1 \sin \alpha_2 \sin^2 a + B_1 \cos \beta_1 \cos c + B_2 \sin \beta_2 \cos a \cos b \\ - C_1 \cos \gamma_1 \cos b + C_2 \sin \gamma_2 \cos a \cos c \\ \operatorname{tg} \varphi_3 = - \frac{A_2 \cos \alpha_2 \sin^2 a + B_1 \sin \beta_1 \cos c - B_2 \cos \beta_2 \cos a \cos b}{- C_1 \sin \gamma_1 \cos b - C_2 \cos \gamma_2 \cos a \cos c} \end{cases}$$

Die Werthe von  $\mathfrak{D}_3$ ,  $\mathfrak{C}_3$ ,  $\chi_3$ ,  $\psi_3$  finden sich aus (35) durch cyklische Vertauschung der Buchstaben.

Die Ausdrücke (34) und (35) beziehen sich im allgemeinen auf räumlich gebeugtes Licht (s. die letzte Alinea des § 6); hier wollen wir aber nur die einfacheren Fälle untersuchen.

§ 11. Anwendung des dritten Systemes auf Erscheinungen, die in einer Ebene liegen; Möglichkeit der Beschreibung.

Es sei auch hier die  $XZ$ -Ebene die Beugungsebene, und somit:  $\cos b = 0$ ,  $\cos c = \sin a$ .

Man findet dann aus (35) für  $\mathfrak{A}_3$  und  $\mathfrak{C}_3$  Werthe, die sich voneinander nur durch die Coëfficienten  $\sin a$  und  $\cos a$  unterscheiden, während  $\varphi_3$  und  $\psi_3$  gleich sind.

Es wird aus (35):

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{D}_3^2 &= \frac{1}{\sin^2 a} \mathfrak{A}_3^2 = \frac{1}{\cos^2 a} \mathfrak{C}_3^2 = A_2^2 \sin^2 a + B_1^2 + C_2^2 \cos^2 a \\ &\quad - 2 A_2 B_1 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \sin a - 2 A_2 C_2 \cos(\gamma_2 - \alpha_2) \sin a \cos a \\ &\quad \quad - 2 B_1 C_2 \sin(\beta_1 - \gamma_2) \cos a, \\ \mathfrak{B}_3^2 &= A_1^2 \sin^2 a + B_2^2 + C_1^2 \cos^2 a - 2 A_1 B_2 \sin(\alpha_1 - \beta_2) \sin a \\ &\quad - 2 A_1 C_1 \cos(\gamma_1 - \alpha_1) \sin a \cos a - 2 B_2 C_1 \sin(\beta_2 - \gamma_1) \cos a, \\ \operatorname{tg} \varphi_3 &= \operatorname{tg} \psi_3 = - \frac{A_2 \sin \alpha_2 \sin a + B_1 \cos \beta_1 + C_2 \sin \gamma_2 \cos a}{A_2 \cos \alpha_2 \sin a + B_1 \sin \beta_1 - C_2 \cos \gamma_2 \cos a}, \\ \operatorname{tg} \chi_3 &= - \frac{A_1 \cos \alpha_1 \sin a - B_2 \sin \beta_2 + C_1 \cos \gamma_1 \cos a}{A_1 \sin \alpha_1 \sin a + B_2 \cos \beta_2 - C_1 \sin \gamma_1 \cos a}. \end{aligned} \right.$$

Man hat nun im Sinne des § 7 für die zur Beugungsebene (Einfallsebene) parallele und senkrechte Schwingungscomponente:

$$(37) \quad (u_3^2 + w_3^2)^{1/2} = J \mathfrak{D}_3 \cos(\vartheta + \omega + \varphi_3), \quad v_3 = J \mathfrak{B}_3 \cos(\vartheta + \omega + \chi_3).$$

Diese zwei Ausdrücke (37) stellen elliptisch polarisirtes Licht dar; Amplitude und Phase jeder Componente sind verschieden.

Aus den Werthen (36) der Amplituden  $\mathfrak{D}_3$  und  $\mathfrak{B}_3$  und der Phasen  $\varphi_3$  und  $\chi_3$  bemerkt man sofort, dass dieselben je für sich, und zwar in verschiedener Weise vom Richtungswinkel  $a$  des gebeugten Strahles abhängen.

Die Art der Abhängigkeit wird auch durch die Constanten  $A_1, B_1, C_1; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; A_2, B_2, C_2; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  bestimmt.

Es braucht wohl kaum hinzugefügt werden, dass man mittels einer so grossen Anzahl von Constanten schon sehr complicirte und scheinbar ganz unregelmässige Erscheinungen darstellen kann, bei denen die Amplitude und Phase nicht nur von der Wirkung der Beugung [d. i. von  $J$  und  $\omega$ , Formel (9) und (11)], sondern ausserdem noch nach (36) explicite von  $a$  abhängt.

Man kann also die mittels der Formeln (37) dargestellten Schwingungen zur Beschreibung solcher Erscheinungen anwenden, die in der That auftreten und beobachtet wurden.<sup>1)</sup>

Das Amplitudenverhältniss und die Phasendifferenz werden aus den Formeln (36) wie folgt:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathfrak{B}_2^2}{\mathfrak{D}_2^2} = \operatorname{tg}^2 \eta &= \frac{A_1^2 \sin^2 a + B_2^2 + C_1^2 \cos^2 a - 2 B_2 C_1 \cos(\beta_2 - \gamma_1) \cos a}{A_2^2 \sin^2 a + B_1^2 + C_2^2 \cos^2 a - 2 B_1 C_2 \cos(\beta_1 - \gamma_2) \cos a} \\ &\quad - \frac{2 A_1 C_1 \cos(\gamma_1 - \alpha_1) \sin a \cos a - 2 A_1 B_2 \sin(\alpha_1 - \beta_2) \sin a}{- 2 A_2 C_2 \cos(\gamma_2 - \alpha_2) \sin a \cos a - 2 A_2 B_1 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \sin a} \\ \operatorname{tg}(\chi_3 - \psi_3) &= \operatorname{tg}(\chi_3 - \varphi_3) = \\ &\quad - \frac{A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 a - B_1 B_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) - C_1 C_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cos^2 a}{+ (B_1 C_1 \sin(\beta_1 - \gamma_1) + B_2 C_2 \sin(\beta_2 - \gamma_2)) \cos a} \\ &\quad + \frac{(A_1 C_2 \cos(\alpha_1 - \gamma_2) + A_2 C_1 \cos(\alpha_2 - \gamma_1)) \sin a \cos a + (A_1 B_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) + A_2 B_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2)) \sin a}{- A_1 A_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 a + B_1 B_2 \sin(\beta_1 - \beta_2) - C_1 C_2 \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \cos^2 a} \\ &\quad + \frac{(B_1 C_1 \cos(\beta_1 - \gamma_1) - B_2 C_2 \cos(\beta_2 - \gamma_2)) \cos a}{+ (A_1 C_2 \sin(\alpha_1 - \gamma_2) - A_2 C_1 \sin(\alpha_2 - \gamma_1)) \sin a \cos a + (-A_1 B_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) + A_2 B_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2)) \sin a} \end{aligned} \right.$$

Diese Ausdrücke, die ebenfalls die erwähnten zwölf Constanten enthalten, schliessen die von Rêthy und W. König benutzten Formeln (28) und (29) als Specialfälle ein.

#### § 12. Vereinfachung der gewonnenen Ausdrücke.

Indem man über die Constanten in geeigneter Weise disponirt, lassen sich sehr verschiedenartige Erscheinungen darstellen.

Würde man z. B. setzen:

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2,$$

1) Fröhlich, l. c. p. 587 u. 589.



so erhielt man:

$$\frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}_3} = 1; \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \chi_3) = \operatorname{tg}(\psi_3 - \chi_3) = \infty.$$

Dies bedeutet circular polarisirtes Licht für jeden gebeugten Strahl, dessen Intensität jedoch von der zum Strahl gehörigen Richtung  $\alpha$  abhängt.

Damit man jedoch zu solchen Ausdrücken gelange, die einfacher sind als (36), (37), (38), und die dennoch mit der Erfahrung übereinstimmen, setze man:

$$(39) \quad \text{I.} \quad \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0.$$

Dann folgt aus (36):

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_3^2 = B_1^2 + (A_2 \sin \alpha - C_2 \cos \alpha)^2, \\ \mathfrak{B}_3^2 = B_2^2 + (A_1 \sin \alpha - C_1 \cos \alpha)^2, \\ \operatorname{tg} \varphi_3 = \operatorname{tg} \psi_3 = - \frac{B_1}{A_2 \sin \alpha - C_2 \cos \alpha}, \\ \operatorname{tg} \chi_3 = + \frac{A_1 \sin \alpha - C_1 \cos \alpha}{B_2}. \end{array} \right.$$

Auch hier hängt jede der Phasen und Amplituden explicite von  $\alpha$  ab. Aus (38) wird aber:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{B}_3^2}{\mathfrak{D}_3^2} = \operatorname{tg}^2 \eta = \frac{B_2^2 + (A_1 \sin \alpha - C_1 \cos \alpha)^2}{B_1^2 + (A_2 \sin \alpha - C_2 \cos \alpha)^2}, \\ \operatorname{tg}(\chi_3 - \varphi_3) = \operatorname{tg}(\chi_3 - \psi_3) \\ = - \frac{A_1 A_2 \sin^2 \alpha + B_1 B_2 + C_1 C_2 \cos^2 \alpha - (A_1 C_2 + A_2 C_1) \sin \alpha \cos \alpha}{(B_1 C_1 - B_2 C_2) \cos \alpha - (A_1 B_1 - A_2 B_2) \sin \alpha}. \end{array} \right.$$

Selbst diese Ausdrücke vereinfachen sich, wenn man von den Constanten  $A_1, B_1, A_2, C_2$  eine oder zwei gleich Null setzt.

II. Man schreibe:

$$(42) \quad B_1 = B_2 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

Es wird dann aus (36):

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_3^2 = A_2^2 \sin^2 \alpha + C_2^2 \cos^2 \alpha - 2 A_2 C_2 \cos(\alpha - \gamma) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \mathfrak{B}_3^2 = A_1^2 \sin^2 \alpha + C_1^2 \cos^2 \alpha - 2 A_1 C_1 \cos(\alpha - \gamma) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} \varphi_3 = \operatorname{tg} \psi_3 = + \frac{A_2 \sin \alpha \sin \alpha - C_2 \sin \gamma \cos \alpha}{A_2 \cos \alpha \sin \alpha - C_2 \cos \gamma \cos \alpha}, \\ \operatorname{tg} \chi_3 = - \frac{A_1 \cos \alpha \sin \alpha - C_1 \cos \gamma \cos \alpha}{A_1 \sin \alpha \sin \alpha - C_1 \sin \gamma \cos \alpha}. \end{array} \right.$$

Auch diese Phasen und Amplituden hängen einzeln explicite von  $\alpha$  ab, während  $\mathfrak{B}_3^2/\mathfrak{D}_3^2$  und  $\text{tg}(\chi_3 - \varphi_3) = \text{tg}(\chi_3 - \psi_3)$  sich aus (38) sofort ergeben.

§ 18. Rückblick und Schlussbemerkung.

Ausgangspunkt und Grundlage der vorstehenden Betrachtungen waren die partiellen Differentialgleichungen der Bewegung, die für einen unendlich ausgedehnten elastischen Körper Geltung haben, § 3. Wir zeigten, dass die von Réthy und W. König benutzten zwei Lösungssysteme mit den Erfahrungsthatsachen in Widerspruch seien (§§ 5—8).

Hierauf stellten wir ein drittes System von Lösungen auf, das zur Wiedergabe der Beobachtungen vollkommen geeignet ist (§ 9—12).

Eine numerische Vergleichung der aus dem letzten Systeme folgenden Formeln mit der Erfahrung erscheint hier wohl überflüssig, da, wie schon oben bemerkt, mittels zwölf Constanten schon ganz unregelmässig scheinende Erscheinungen dargestellt werden können.

Gelegentlich meiner Untersuchungen über die Intensität des gebeugten Lichtes bemerkte ich, dass es kein richtiger Vorgang ist, für solche optische Gitter, die W. König und ich benutzten, und deren Intervall nur sehr wenige Wellenlängen beträgt, die in (7) auftretenden Grössen  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  als constant zu betrachten.

Ich habe daher dort<sup>1)</sup> einen anderen Vorgang gewählt; ich betrachtete die Bewegung an der Beugungsfläche als im allgemeinen unbekannt und setzte nur voraus, dass sie homogen sei.

Ich versuchte, aus den Beobachtungsdaten auf diejenigen Lichtbewegungen zurückzuschliessen, die an der Beugungsfläche möglicherweise stattfinden können, und fand, dass unendlich viele solcher Bewegungen möglich sind, deren jede die Beobachtungen mit der grössten Genauigkeit wiedergibt.

Auch jetzt halte ich noch diese Betrachtungsweise der Beugungserscheinungen für die richtige, trotzdem das in vorliegender Arbeit entwickelte dritte System von Lösungen die angeführten Erfahrungen beschreiben kann.

1) l. c. p. 596.

Ich erblicke in dieser hier gezeigten Lösungsmethode nur einen neuen Beweis des Erfahrungssatzes unserer Naturerkenntniss, dass man selbst aus den unwahrscheinlichsten Voraussetzungen Folgerungen ziehen und Formeln entwickeln kann, die sich durch geschickte Behandlung mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung bringen lassen.

#### IV. Studien über Salzlösungen; von C. Bender.

(Hierzu Taf. II Fig. 1—3a—5.)

##### 1. Allgemeine Gesichtspunkte. Correspondirende Lösungen.

Mischt man eine concentrirte Lösung eines Salzes (in Wasser) mit einer verdünnten Lösung desselben oder eines anderen Salzes, welches gegen ersteres vollständig chemisch inactiv ist, so werden im allgemeinen Mischungen entstehen, deren physikalische Constanten nicht mit denjenigen übereinstimmen, welche man als Mittelwerthe aus den Constanten der einzelnen Lösungen berechnet hat. Von dem Vorgang bei der Mischung solcher chemisch inactiver Salzlösungen kann man sich zwei Vorstellungen bilden. Man kann annehmen, die concentrirte Lösung entziehe der verdünnteren das Lösungswasser und umgekehrt. Man kann jedoch auch annehmen, die gelösten Salzmoecüle treten bei der Mischung zu Gruppen zusammen, welche sich in dem gemeinsamen Lösungsmittel lösen. Welche Auffassung auch die richtige sein mag, immerhin wird es Lösungen geben müssen, deren Concentrationsgrad von der Art ist, dass beide in Bezug auf eine oder mehrere Constanten indifferent in ihren Mischungen nebeneinander existiren. Lösungen dieser Art mögen correspondirende Lösungen genannt werden. Es sind daher: correspondirende Salzlösungen solche untereinander chemisch inactive Salzlösungen, welche die Eigenschaft haben, dass ihre physikalischen Constanten in die Mischungen gleicher oder verschiedener Volumina der Lösungen untereinander ohne

Veränderung ihres Werthes eintreten, sodass die physikalischen Constanten der Mischungen das arithmetische Mittel bilden aus den betreffenden physikalischen Constanten der Einzellösungen.

Dieser Satz, welcher späterhin eine Erweiterung erfahren wird, lässt sich allgemein darstellen durch:

$$k = \frac{a_1 k_1 + a_2 k_2}{a_1 + a_2},$$

in welcher Formel  $k_1$  und  $k_2$  die gleichartigen Constanten der Einzellösungen,  $a_1$  und  $a_2$  ihre, der Mischung unterworfenen Volumenmengen, und  $k$  die berechnete Constante und das arithmetische Mittel bedeuten.

Das Aufsuchen der correspondirenden Lösungen bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Ich verdanke die Anregung zu dieser Arbeit Hrn. Prof. Dr. W. v. Bezold in München, welcher seiner Zeit so freundlich war, mir dieses Thema und speciell die Untersuchung der Ausdehnungscoëfficienten zur experimentellen Ausführung zu empfehlen. Dieser Anregung kam ich um so lieber nach, als systematische Untersuchungen in der angedeuteten Richtung vollständig fehlen. Ebenso schien mir der Gegenstand für die chemische Statik von weittragender Bedeutung zu sein. Selbst die analytische Chemie, und sogar die Theorie constanter Ketten kann durch systematisch in dieser Richtung ausgeführte Versuche wesentlich bereichert werden.

Die bis jetzt bekannten Eigenschaften der Salzlösungen lassen es wahrscheinlich erscheinen, dass jede Salzlösung als ein homogenes Individuum für sich betrachtet werden muss, welches, vom physikalischen Standpunkte aus, nicht in Wasser + Salz zu trennen ist. Hierfür sprechen wohl alle physikalischen Untersuchungen über Salzlösungen, welche ich unterlasse namentlich und inhaltlich hier anzuführen.

Eine besondere Stütze für diese Ansicht bilden die interessanten Modulareigenschaften der Salzlösungen, welche bis jetzt von C. A. Valson<sup>1)</sup> für die Capillarerhebung, für

1) C. A. Valson, Ann. de chim. et de phys. (4) 20. p. 361. 1870. Jahresber. f. Chem. 1870. p. 42.

die Dichte <sup>1)</sup> und für das Lichtbrechungsvermögen <sup>2)</sup> ermittelt wurden, und deren allgemeines Dichtegesetz von mir <sup>3)</sup> bewiesen wurde. Diese deuten zweifellos an, dass die physikalischen Constanten der Salzlösungen wesentlich eine Function der gelösten Salzatome sind, während das Wasser in ihnen doch nur den Vermittler der Erscheinungen bildet.

Die von mir <sup>4)</sup> bewiesenen, für alle Concentrationsgrade geltenden Modulareigenschaften der Dichte lassen nun endlich erkennen, dass die Anzahl der in der Raumeinheit der Salzlösungen bei gegebener Temperatur vorhandenen Salz-moleculé den einzigen Maassstab der Vergleichung der Salzlösungen untereinander bezüglich ihrer physikalischen Constanten bilden kann.

## 2. Die correspondirenden NaCl- und KCl-Lösungen für Dichte und Ausdehnungscoefficient.

### a) Dichte und Ausdehnungscoefficient der Chlorkalium-lösungen.

Untersuchungsmethode. — Die Untersuchung der Dichte und des scheinbaren Ausdehnungscoefficienten verbreitet sich zunächst über eine Reihe von Metallchloridlösungen und ihren Mischungen, über welche ich gruppenweise berichten werde, um schliesslich einem allgemeinen Ueberblick über die erlangten Resultate mich zuzuwenden. Für jede Gruppe wurde gleichzeitig die Electricitätsleitung bestimmt. Die Mittheilung dieser letzteren Beobachtungen schliesst sich an diejenige der Dichte und des Ausdehnungscoefficienten an.

Die Normallösungen enthalten sämmtlich bei 15° C. in einem Liter der Lösung eine bis auf 1 mg genau abgewogene Anzahl Grammmoleculé, und zwar in der Regel 0,5, 1, 1,5 etc. Die Herstellungsweise der Normallösungen lieferte sie ziemlich luftfrei, da durch längeres Kochen diese Luft stets entfernt worden war.

Die Mischungen der Salzlösungen wurden durch Zu-

1) C. A. Valson, Compt. rend. 73. p. 441. 1871 u. 77. p. 806. 1873.

2) C. A. Valson, Compt. rend. 76. p. 224. 1873.

3) C. Bender, Wied. Ann. 20. p. 560—578. 1888.

4) C. Bender, l. c.

sammenfügen gleicher bei 15° C. gemessener Volumina der betreffenden Salzlösungen erhalten. Hierbei geschah die Mischung von  $\text{NaCl}_{(4 \text{ Mol.})}$  mit fast sämtlichen Normallösungen der KCl-Reihe, und die gleiche Anzahl Mischungen bestehen für  $\text{NaCl}_{(2 \text{ Mol.})}$  als gemeinschaftlichen Bestandtheil. Die aus diesen Versuchsreihen erkannten Wahrheiten wurden durch die übrigen Combinationen von NaCl mit KCl-Lösungen bestätigt.

Zur Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten diente das Dilatometer von Dr. Reischauer. Dieses Instrument bietet den Vortheil, dass man die Salzlösungen ohne Aenderung ihrer Concentration einfüllen kann.

Die Dimensionen des Apparates sind:

Volumen des Dilatometergefässes bis zum Theilstrich 0 der Scala  
96,0749 cem bei 0°,

Vol. der einen vollkommen cylindrischen Capillarröhre für 1 cm der  
Theilung 0,01729 bei mittlerer Temperatur,

Vol. der anderen vollkommen cylindrischen Capillarröhre für 1 cm  
der Theilung 0,01702 bei mittlerer Temperatur.

Das Volumen des Dilatometergefässes wurde durch Wägen derjenigen luftfreien Wassermenge bestimmt, welche bei 0° das Dilatometer in den beiden Capillarröhren bis zum Theilstrich 0 erfüllte.

Zur Bestimmung des cubischen Ausdehnungscoefficienten der Glassorte des Dilatometergefässes dienten kleine, aus dieser Glassorte gefertigte Kölbchen, welche, mit Quecksilber gefüllt, bei 0° und 100° C. gewogen wurden. (Methode von Jolly). Unter Zugrundelegung des Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers für 1° C. = 0,000 181 5 wurde der cubische Ausdehnungscoefficient des betreffenden Glases = 0,000 027 98 für 1° C. gefunden. Hieraus berechnet sich das

Volumen des Dilatometers bis zum Theilstrich 0 = 96,11522 cem bei 15° C.

" " " " " " " 0 = 96,12869 " " 20°

Während der Ausdehnungsversuche befand sich das Dilatometer so weit in dem, bis zum Rande gefüllten, Wasserbad, dass noch gerade eine Fernrohrablesung möglich war. Die grosse Wassermenge des, mit einer Rührvorrichtung ver-

sehenen, Bades (35 Liter) gestattete eine langsame und regelmässige Temperatursteigerung. Damit eine möglichste Uebereinstimmung zwischen der Temperaturangabe des Thermometers und der Temperatur des Dilatometergefässes stattfände, umkleidete ich das Thermometer mit einem unten geschlossenen und mit Wasser gefüllten Glaszylinder, in welchen es durch einen lose aufgesteckten Kork hineinragte. Jeder Versuch nahm von dem Augenblicke an, in welchem die gewünschte Temperatur des Bades bis auf  $0,1^{\circ}\text{C.}$  unterhalb erreicht war,  $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$  Stunden in Anspruch.

Das von Dr. Geissler's Nachfolger in Bonn construirte Thermometer war in  $\frac{1}{50}^{\circ}\text{C.}$  getheilt und änderte während der Dauer eines Jahres seinen Nullpunkt nicht. Die Fernrohrbeobachtung gestattete eine Abschätzung von  $0,01^{\circ}\text{C.}$  In Ermangelung eines Luftthermometers verglich ich dieses Thermometer mit einem Normalthermometer der hiesigen meteorologischen Station, welches seinerseits nach dem Normalthermometer von Fuess in Berlin im Jahre 1878 corrigirt worden war und seit dieser Zeit seinen Nullpunkt nicht geändert hatte. Die Temperaturablesungen geschahen stets bei steigender Temperatur. Da das Thermometer nur innerhalb des Temperaturintervalles 15 bis  $25^{\circ}\text{C.}$  Verwendung fand und nie einer höheren Temperatur ausgesetzt wurde, so war ein Schwanken des zeitlichen Nullpunktes ausgeschlossen.

Bei der Ablesung der Scalentheile der Capillarröhren des Dilatometers wurden 0,1 mm abgeschätzt. Im ungünstigsten Falle konnten hierdurch Beobachtungsfehler von  $0,35\%$  des Resultates eintreten. Die Bestimmungen sind daher vollkommen zuverlässig bis zur fünften Decimalstelle und differiren in der sechsten Decimalstelle um etwa  $\pm 2$  Einheiten. Die Dichteangaben  $d_{15}^{\circ}$  gelten fast durchweg für die Temperatur  $15^{\circ}\text{C.}$  und beziehen sich auf Wasser von  $4^{\circ}\text{C.} = 1$ . Sie schwanken um  $\pm 3$  Einheiten in der vierten Decimale, ein Fehler, welcher durch die, nur angenäherten, Correctionen auf den luftleeren Raum bedingt ist. Das Dilatometergefäss wog ich frühestens eine Stunde nach dem Aufhängen an der Wage, deren umgebende Luft durch Schwefelsäure



trocken gehalten wurde. Die Lösungen wurden in luftfreiem Zustande dem Versuche unterworfen und zu diesem Zwecke unmittelbar vorher in einem langhalsigen Kolben mehrere Minuten lang zum Sieden erhitzt, hierauf, wohl verschlossen, erkalten lassen.

Es bedeuten in sämtlichen nachfolgenden Tabellen:

$v_{15}$  Volumen der Lösung bei 15° C.;

$v_{20}$  " " " " 20° C.;

$d_{15}$  Dichte " " " 15° C.;

$\Delta v_{15-20}$  scheinbare Volumenzunahme der Lösung bei 15—20° C.;

$\Delta v_{20-25}$  scheinbare Volumenzunahme der Lösung bei 20—25° C.;

$\alpha_{15-20} = \Delta v_{15-20} / v_{15}$  scheinbarer Ausdehnungscoefficient zwischen 15 und 20°;

$\alpha_{20-25} = \Delta v_{20-25} / v_{20}$  scheinbarer Ausdehnungscoefficient zwischen 20 und 25°.

Will man zum Zwecke der Vergleichung die, in sämtlichen Tabellen angegebenen, scheinbaren Ausdehnungscoefficienten für das Intervall von 5° in absolute umwandeln, so hat man zu denselben die Zahl 0,000 139 9 zu addiren.

Tabelle 1.

Chlorkaliumlösungen (KCl = 74,58). Fig. 1.

Nr.	Molecülzahl $\mu$ 1)	$v_{15}$	$\alpha_{15-20}$	$\alpha_{20-25}$	$d_{15}$
1	4,23	—	—	0,001 718	— 2)
2	4,11	96,3469	0,001 625	1 712	1,1762 3)
3	3,92	2422	1 606	—	1,1696 4)
4	3,5	2740	1 577	1 672	1,1523
5	3	3705	1 521	1 620	1,1317
6	2,5	2550	1 440	1 566	1,1086 (?)
7	2	2720	1 360	1 508	1,0887
8	1,5	4000	1 255	1 427	1,0672
9	1	3977	1 109	1 312	1,0444
10	3	3950	1 043	1 248	1,0339
11	2	2417	0 897	1 135	1,0163
12	1	3140	0 823	1 074	1,0081
13	0	2178	0 738	1 011	0,9991

1)  $\mu$  bedeutet die in 1 l der Lösung bei 15° C. enthaltenen Gramm-molecüle an wasserfreiem Salz.

2) Bei 20° C. übersättigte Lösung;  $\mu = 4,23$  in 1 l der Lösung bei 20° C.

3) Bei 15° C. übersättigte Lösung.

4) Bei 14,9° C. gesättigte Lösung.

Die Curven  $\alpha_{15-20^\circ}$  und  $\alpha_{20-25^\circ}$  sind darstellbar durch Ausdrücke zweiten Grades in Bezug auf  $\mu$ . Nach der Methode der kleinsten Quadrate wurde für die concentrirteren Chlorkaliumlösungen von  $\mu = 1,5$  aufwärts der Ausdruck aufgestellt:

$$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,077\,8 + 0,000\,271\,62\,\mu - 0,000\,029\,40\,\mu^2$$

und für die verdünnteren bis  $\mu = 1$ :

$$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,008\,77 + 0,000\,356\,19\,\mu - 0,000\,049\,92\,\mu^2,$$

wobei das von  $\mu$  freie Glied dieses zweiten Ausdruckes mit  $\alpha_{20-25^\circ}$  für  $\mu = 0$ , d. h. mit dem  $\alpha_{20-25^\circ}$ , welches bei Wasser gefunden wurde  $= 0,001\,011$ , innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmt.

Die Dichten der Salzlösungen lassen sich, wie schon früher bemerkt, ebenfalls durch einen in Bezug auf  $\mu$  quadratischen Ausdruck darstellen, und für die Chlorkaliumlösungen gilt von  $\mu = 1$  an aufwärts:

$$d_{15^\circ} = 0,999\,963 + 0,045\,349\,\mu - 0,000\,418\,\mu^2,$$

wobei zu bemerken ist, dass sich diese Chlorkaliumlösungen nur sehr schwierig einer allgemeinen Formel zweiten Grades unterordnen lassen.

Wie aus Fig. 1 hervorgeht, nähern sich die Curven  $\alpha_{15-20^\circ}$  und  $\alpha_{20-25^\circ}$  bei zunehmender Concentration, was die schon bekannte Thatsache bestätigt, dass mit wachsendem Salzgehalte die Ausdehnung der Lösungen eine gleichmässige wird. Dies gilt für alle in Fig. 1 gezeichneten Curven. Eine sprunghafte Aenderung bei dem Uebergang von ungesättigten zu den gesättigten und übersättigten Lösungen kann bei diesen Curven nicht nachgewiesen werden.

#### b) Contraction beim Lösen des Chlorkaliums.

Bezeichnen wir mit  $v$  das Volumen des zu lösenden Salzes bei  $15^\circ$  C.

mit  $V$  das Volumen des Lösungswassers bei  $15^\circ$  C.

„  $V'$  „ „ beider nach dem Lösen bei  $15^\circ$  C.

(hier durchweg  $= 1$  l),

so ist  $(V + v) - V' = \Delta v$  die Volumenabnahme beim Lösen des Salzes.

Wir bezeichnen das Verhältniss der Contraction  $\Delta v$  zu dem Volumen des gelösten Salzes (vor der Lösung)  $v$  mit dem Namen Contractionscoefficient ( $= \Delta v/v$ ).

Die in Tabelle 2 niedergelegten Werthe sind aus den Dichtebestimmungen, welche in Tab. 1 angegeben wurden, entnommen, während für die Dichte des festen Chlorkaliums bei 15° C. derjenige Werth ( $= 1,976$ ) gewählt wurde, welchen P. A. Favre und C. A. Valson<sup>1)</sup> bei ihren Untersuchungen über Contractionsverhältnisse verschiedener Salze angeben. Die Dichte des Wassers bei 15° C. ist  $= 0,9991$  angenommen worden.

Tabelle 2.

Contraction beim Lösen des Chlorkaliums.

Nr.	$\mu$	$v$	$V$	$\Delta v$	$\frac{\Delta v}{v}$	Bemerkungen
1	4,11	155,1	870,5	25,6	0,165	bei 15° C. übersättigte Lösung
2	3,92	147,9	878,0	25,9	0,176	„ 14,9° C. gesättigte „
3	3,5	132,1	892,1	24,2	0,183	
4	3	113,2	908,8	22,0	0,194	
5	2,5	94,4	923,0	17,3	0,184	?
6	2	75,5	940,4	15,9	0,210	
7	1,5	56,6	956,2	12,8	0,226	
8	1	37,7	970,7	8,4	0,224	
9	$\frac{1}{2}$	28,3	978,8	7,1	0,250	
10	$\frac{1}{4}$	14,2	989,2	3,4	0,240	?
11	$\frac{1}{8}$	7,1	995,0	2,1	0,294	

Der Contractionscoefficient nimmt, wie diese Tabelle zeigt, mit wachsender Concentration fortwährend ab und zeigt selbst für übersättigte Lösungen keine sprunghafte Aenderung, wie auch aus den Beobachtungen von C. A. Valson<sup>2)</sup> hervorgeht. Die einzelnen Werthe zeigen kleine Unregelmässigkeiten, welche sich einerseits dadurch erklären lassen, dass ein Fehler in der Dichtebestimmung von 0,0004 die zweite Decimalstelle schon beeinflusst.

Andererseits mag auch wohl die grosse Neigung des Chlorkaliums, übersättigte Lösungen einzugehen, auf die Dichte der Lösungen, selbst der verdünnteren, nicht ohne Einfluss sein.

1) P. A. Favre u. C. A. Valson, Compt. rend. 77. p. 802—809. 1873. Jahresb. f. Chem. 1873. p. 87.

2) C. A. Valson. Compt. rend. 73. p. 1376. 1871.

## c) Die übersättigten Chlorkaliumlösungen.

Obgleich nach den Angaben J. Jeannel's und Ch. Tomlinson's<sup>1)</sup> wasserfrei krystallisirende Salze keine übersättigte Lösungen bilden sollen und bei Luftabschluss aus den kochend gesättigten Lösungen immer bis zum Sättigungspunkt auskrystallisiren, so ist doch später von D. Page und A. D. Reightley<sup>2)</sup> gezeigt worden, dass der Salzgehalt einer sogenannten gesättigten Chlorkalium- oder Chlornatriumlösung abhängig davon ist, ob die Lösung vorher bei einer höheren Temperatur (100° C.) gesättigt war und alsdann langsam auf eine niedrigere Temperatur abgekühlt wurde, oder ob das Salz bei einer gegebenen Temperatur so lange im Ueberschuss mit Wasser in Berührung war, als sich noch davon löste.

Im ersten Falle enthielten bei 15,6° C. 1000 Gewichtstheile 248,4 Gew. KCl, im letzteren Falle enthielten bei 15,6° C. 1000 Gewichtstheile 247,4 Gew. KCl.

So gering dieser Unterschied auch ist, führte er mich doch zur Vermuthung, dass Chlorkalium geneigt ist, auch bei gewöhnlicher Temperatur übersättigte Lösungen zu bilden, ähnlich wie dieses von L. C. de Coppet<sup>3)</sup> bei Kochsalz für niedere Temperatur gefunden wurde.

Meine nicht erschöpfenden Untersuchungen hierüber bestätigen diese Vermuthung.

Eine bei Siedehitze der Lösung gesättigte Lösung wurde sehr langsam auf 14,9° C. erkalten lassen, ohne umzuschütteln, und enthielt alsdann in 1000 Gew. der Lösung 249,9 Gew. KCl. Sie zeigte die charakteristischen Eigenschaften einer übersättigten Lösung nicht, doch setzten sich nach Verlauf von acht Tagen etwa an dem Boden dichte Krystalle von Chlorkalium ab. Da auch diese Lösung concentrirter ist, als jede der beiden oben angegebenen bei 15,6° C.

1) J. Jeannel, *Compt. rend.* **62**, p. 37. 1876. *Zeitschr. f. Chem.* 1866. p. 108. *Jahresb. f. Chem.* 1865. p. 79. Ch. Tomlinson, *London Proc. Roy. Soc.* **16**, p. 403. 1868. *Jahresb. f. Chem.* 1868. p. 44.

2) D. Page u. A. D. Reightley, *Jahresb. f. Chem.* 1872. p. 25.

3) de Coppet, *Compt. rend.* **74**, p. 328. 1872. *Jahresber. f. Chem.* 1872. p. 21.

gesättigten Lösungen, so tritt hiermit der Einfluss der anfänglichen Sättigungstemperatur deutlich hervor und modificirt den Begriff der Sättigung wesentlich. Eine zweite, kochend gesättigte Lösung erkaltete ziemlich rasch auf 15° C., eine andere ebenso auf 20° C.

Erstere enthielt in 1000 Gew. der Lösung 260,6 Gew. KCl (I).

Letztere enthielt in 1000 Gew. der Lösung 267,3 Gew. KCl (II).

Beide Lösungen waren übersättigte. Erstere (I) schied, in einem verschlossenen Kölbchen aufbewahrt, beim Schütteln, während die Temperatur 15° C. blieb, oder beim Einbringen eines kleinen Krystalles, nadelförmige Krystalle aus. Im Dilatometer dagegen trat erst bei 12,4° C. eine rasche Ausscheidung krystallinischer Nadeln ein, welche sich kugelförmig gruppirten und an den Ansatzstellen der beiden Capillarröhren sich zuerst bildeten.

Die andere (II), auf 20° erkaltete und übersättigte Lösung schied in dem Dilatometergefäß bei 16,6° C. ebenfalls Krystalle ab. Beide Lösungen repräsentiren also einen gewissen labilen Zustand, welcher das Merkmal übersättigter Lösungen ist. Die Fähigkeit, übersättigte Lösungen einzugehen, scheint überhaupt eine allgemeine Eigenschaft der Salze zu sein, wie auch schon Mulder<sup>1)</sup> annimmt.

Die übersättigten Chlorkaliumlösungen ziehen sich bis zur Grenze der Krystallabscheidung sehr gleichmässig zusammen. An dem Dilatometer wurden bei der Lösung (I) folgende relative Volumina über dem Nullpunkte der Capillaren für die nebenstehenden Temperaturen beobachtet.

<i>t</i>	<i>v</i>	<i>t</i>	<i>v</i>	
25,00	0,488	14,20	0,148	
20,00	0,322	12,40	0,088	nach 3 Stunden,
18,00	0,266	12,40	0,096	
16,95	0,228	12,00	0,126	nach weiteren 3 Stunden
15,00	0,168	11,60	0,126	" " $\frac{3}{4}$ "

1) G. J. Mulder, Bijdragen tot de geschiedenis van het scheikundig gebonden water. Rotterdam 1864, p. 146.

Die mit dem Abscheiden der Krystalle verbundene Volumenvermehrung kann bei den übersättigten Chlorkaliumlösungen bequem zu einem Vorlesungsexperiment Verwendung finden, da andere stark übersättigte Salzlösungen, wie z. B. Glaubersalzlösungen, eine wesentlich subtilere Behandlung erfordern.

d) Dichte und Ausdehnungskoeffizient der Chlornatriumlösungen.

Tabelle 3. Fig. 1.

(NaCl = 58,5.)

Nr.	$\mu$	$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$	Bemerkungen
1	5,33	96,1627	0,002 039	0,002 086	1,2014	bei 15° gesättigte Lösung
2	4,5	3297	1 935	2 007	1698	
3	4	3181	1 875	1 954	1522	
4	3,5	4150	1 808	1 901	1339	
5	3	3153	1 736	1 835	1164	
6	2,5	1744	1 636	1 750	0975	
7	2	2298	1 523	1 648	0788	
8	1,5	2581	1 382	1 526	0593	
9	1	2911	1 217	1 390	0401	
10	0,5	3198	1 001	1 223	0200	
11	0,25	3538	0 873	1 115	0096	

Bei gleicher Concentration dehnen sich also die Chlornatriumlösungen stärker aus, als die Chlorkaliumlösungen.

Die Ausdehnungskoeffizienten der Chlornatriumlösungen von  $\mu = 1$  aufwärts lassen sich durch die allgemeine Formel darstellen:

$$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,076\,48 + 0,000\,346\,87\,\mu - 0,000\,031\,45\,\mu^2,$$

welche sich den experimentellen Bestimmungen enger anschliesst, als diejenige, welche für die Chlorkaliumlösungen abgeleitet wurde:

$$d_{15} = 1,001\,020 + 0,039\,651\,\mu - 0,000\,429\,\mu^2.$$

## e) Contraction beim Lösen des Chlornatriums.

Tabelle 3.

Dichte des festen Chlornatriums bei 15° C. = 2,143.

Dichte des Wassers bei 15° C. = 0,9991.

Nr.	$v$	$\mu$	$V$	$\Delta v$	$\frac{\Delta v}{v}$	Bemerkungen
1	5,33	150,0	880,7	30,7	0,204	b. 15° C. gesätt.
2	4,5	122,3	907,5	30,3	0,247	
3	4	109,2	919,1	28,3	0,259	
4	3,5	95,5	930,0	25,6	0,267	
5	3	81,9	941,6	23,6	0,287	
6	2,5	68,2	952,2	20,4	0,299	
7	2	54,6	962,7	17,3	0,316	
8	1,5	40,9	972,5	13,4	0,328	
9	1	27,3	982,4	9,7	0,356	
10	0,5	13,6	991,6	5,3	0,388	
11	0,25	6,8	995,9	2,7	0,399	

Auch hier verdient die Thatsache Beachtung, dass der Contractionscoefficient  $\Delta v/v$  mit der Concentration regelmässig abnimmt.

## f) Mischungen gleicher Raumtheile verschiedener Lösungen.

Zunächst mögen verschieden concentrirte Lösungen desselben Salzes betrachtet werden. Die den gefundenen Werthen in Klammern überschriebenen Zahlen bedeuten arithmetische Mittel, welche aus den Einzellösungen mit den Molecülzahlen  $\mu$ , resp.  $\mu'$  berechnet wurden.

Tabelle 5.  
KCl  $\mu$  + KCl  $\mu'$ .

Nr.	$\mu$	$\mu'$	$\pi_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15^\circ}$
1	3	1,5	96,3771	(1 388) 0,001 407	(1 524) 0,001 548	(1,0995) 1,1006
2	1,5	$\frac{3}{2}$	2880	(1 150) 1 162	(1 838) 1 349	—
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	3294	(0 972) 0 978	(1 191) 1 197	—
4	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{16}$	—	—	(1 104) 1 107	—
NaCl $\mu$ + NaCl $\mu'$ .						
5	4	2	96,2607	(1 699) 0,001 740	(1 801) 0,001 834	—
6	2	1	3181	(1 370) 1 381	(1 519) 1 539	—



Hieraus folgt die schon bekannte Thatsache, dass der Ausdehnungscoefficient der Mischung verschieden concentrirter Lösungen desselben Salzes grösser ist als derjenige, welcher aus den einzelnen Salzlösungen als arithmetisches Mittel berechnet wird.

Dass beim Mischen solcher Lösungen Contraction eintritt, lehrt Nr. 1 der obigen Tabelle.

Tabelle 6. Fig. 2.<sup>1)</sup>NaCl( $\mu=4$ ) + KCl( $\mu=x$ )

Nr.	$x$	$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$
			(1 726)	(1 814)	(3 540)	(1522)
1	3,5	96,2716	0,001 732	0,001 814	0,003 546	1,1526
			(1698)	(1 787)	(3 485)	(1421)
2	3	2165	1 713	1 803	3 516	1425
			(1 658)	(1 760)	(3 418)	(1304)
3	2,5	2812	1 689	1 778	3 467	1307
			(1 618)	(1 731)	(3 349)	(1205)
4	2	2719	1 662	1 757	3 419	1212
			(1 565)	(1 691)	(3 256)	(1099)
5	1,5	2010	1 630	1 741	3 371	1110
			(1 492)	(1 636)	(3 128)	(9981)
6	1	3282	1 596	1 713	3 309	1001
			(1 459)	(1 601)	(3 060)	(9932)
7	$\frac{3}{2}$	2837	1 592	1 700	3 292	9952
			(1 386)	(1 545)	(2 931)	(9846)
8	$\frac{3}{4}$	2602	1 556	1 677	3 233	9870
			(1 349)	(1 514)	(2 863)	(9802)
9	$\frac{3}{8}$	3060	1 543	1 662	3 205	9834

Der allgemeine Charakter der Curven ist derjenige des zweiten Grades. Es lassen sich daher auch die gefundenen Werthe darstellen durch:

$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,652\,990 + 0,000\,064\,318\,x - 0,000\,005\,293\,x^2$ ,  
von  $x = \frac{3}{8}$  bis  $x = 3,5$  und die berechneten Werthe (arithmetische Mittel) durch:

$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,513\,740 + 0,000\,138\,122\,x - 0,000\,015\,142\,x^2$ ,  
von  $x = 1$  bis  $x = 3,5$ .

Aus diesen allgemeinen Formeln, wie aus der Betrachtung der Figur, geht hervor, dass die Curven, welche die gefundenen Werthe darstellen, weit weniger stark gekrümmt sind, als diejenigen der arithmetischen Mittel. Das mit  $x^2$

1) Die berechneten Mittelwerthe sind in sämmtlichen Figuren durch punktirte Linien dargestellt.

verbundene Glied des ersteren Ausdrucks ist daher in diesem auch wesentlich kleiner, als in dem zweiten.

Contraction und Unterschied des Ausdehnungscoëfficienten zwischen berechnetem und gefundenem Werthe nehmen zu in dem Maasse, in welchem die Concentration der Lösungen verschiedener wird.

Der berechnete Werth des Ausdehnungscoëfficienten und der Dichte ist bei vorhergehender Versuchsreihe durchweg kleiner, als der gefundene.

Die Curven beider convergiren sehr wahrscheinlich nach dem Punkte  $x = 4$ .

Tabelle 7.

 $\text{NaCl}_{(\mu=3)} + \text{KCl}_{(\mu=x)}$ 

Nr.	$x$	$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$
			(1 629)	(1 728)	(3 357)	(1240)
1	3	96,3033	0,001 630	0,001 724	0,003 354	1,1242
			(1 548)	(1 672)	(3 220)	(1025)
2	2	2777	1 559	1 672	3 231	1029
			(1 423)	(1 574)	(2 997)	(0787)
3	1	2704	1 481	1 615	3 096	0813

\* Hier liegt innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen der Vereinigungspunkt beider Curven bei  $x = 3$ .

Tabelle 8.

 $\text{NaCl}_{(\mu=2)} + \text{KCl}_{(\mu=x)}$ 

Nr.	$x$	$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$
			(1 550)	(1 660)	(3 211)	(1,1156)
1	3,5	96,2202	0,001 558	0,001 672	0,003 230	1,1162
			(1 521)	(1 634)	(3 156)	(1053)
2	3	3134	1 532	1 645	3 177	1057
			(1 482)	(1 608)	(3 089)	(0937)
3	2,5	1945	1 475	1 610	3 085	0938
			(1 442)	(1 579)	(3 020)	(0837)
4	2	3431	1 436	1 578	3 014	0838
			(1 389)	(1 538)	(2 927)	(0790)
5	1,5	3000	1 391	1 542	2 933	0733
			(1 316)	(1 480)	(2 796)	(0615)
6	1	3464	1 338	1 492	2 830	0618
			(1 283)	(1 448)	—	(0563)
7	$\frac{3}{2}$	2877	1 308	1 465	—	0569
			(1 210)	(1 392)	—	(0475)
8	$\frac{3}{4}$	2836	1 265	1 431	—	0484
			(1 173)	(1 361)	—	(0435)
9	$\frac{3}{16}$	3512	1 241	1 405	—	0443

Die Curve  $\alpha_{15-25^\circ}$  der arithmetischen Mittel dringt vor  $x = 2,5$  in die Curve der gefundenen Werthe ein und verlässt dieselbe wieder hinter  $x = 2$ . Da nun in Uebereinstimmung mit sämtlichen übrigen Combinationen dieser Gruppe die arithmetischen Mittel sowohl für Dichte als Ausdehnungscoefficient nie grösser sind als die gefundenen Werthe, so scheint innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen eine Berührung beider Curven bei  $x = 2$  stattzufinden.

Die nun noch folgenden Tabellen sind weniger detaillirt und bezwecken nur eine oberflächliche Bestätigung der bis jetzt mit einiger Sicherheit gefundenen Resultate.

Tabelle 9.

NaCl<sub>( $\mu=1$ )</sub> + KCl<sub>( $\mu=x$ )</sub>.

Nr.	$x$	$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$
1	3	96,2604	(1 369) 0,001 403 (1 236)	(1 505) 0,001 547 (1 409)	(2 874) 0,002 950 (2 645)	(1,0859) 1,0868 (0,937)
2	1,5	2002	1 236 (1 163)	1 410 (1 351)	2 646 (2 514)	0538 (0421)
3	1	3375	1 157 (1 130)	1 349 (1 319)	2 507 (2 449)	0422 (0370)
4	$\frac{2}{3}$	2939	1 135 (1 057)	1 324 (1 262)	2 459 (2 319)	0372 (0282)
5	$\frac{1}{2}$	2228	1 068 (1 020)	1 279 (1 232)	2 347 (2 252)	0286 (0241)
6	$\frac{2}{5}$	2534	1 084	1 245	2 279	0243

Die Curve der arithmetischen Mittel  $\alpha_{15-25^\circ}$  tritt in die Curve der gefundenen Werthe zwischen den Werthen  $x = 1,5$  und  $x = 1$  ein und zwischen  $x = 1$  und  $x = \frac{2}{3}$  wieder aus. Eine Berührung beider Curven scheint also nach der Bemerkung zu vorhergehender Tabelle bei  $x = 1$  stattzufinden.

Tabelle 10.

NaCl<sub>( $\mu=1/2$ )</sub> + KCl<sub>( $\mu=x$ )</sub>.

Nr.	$x$	$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$
1	3	96,2820	(1 261) 0,001 333 (1 128)	(1 423) 0,001 491 (1 327)	(2 684) 0,002 824 (2 455)	(1,0738) 1,0774 (0434)
2	1,5	2068	1 134 (1 022)	1 335 (1 237)	2 469 (2 259)	0440 (0270)
3	$\frac{2}{3}$	2530	1 020	1 238	2 258	0272

Nr.	$x$	$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$
			(0 949)	(1 181)	(2 130)	(0181)
4	$\frac{1}{3}$	96,4793	0,003 947	0,001 186	0,002 133	0178
			(0 912)	(1 150)	(2 062)	(0140)
5	$\frac{2}{16}$	8062	0 914	1 155	2 069	0140

Die beiden Curven  $\alpha_{15-25^\circ}$  berühren sich innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler zwischen  $x = \frac{1}{3}$  und  $x = \frac{2}{3}$ .

Tabelle 11.

$\text{NaCl}_{(\mu = 1/2)} + \text{KCl}_{(\mu = x)}$ .

Nr.	$x$	$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$
			(1 197)	(1 968)	(2 565)	(0711)
1	3	96,2850	0,001 299	0,001 452	0,002 751	1,0724
			(1 064)	(1 271)	(2 335)	(0384)
2	1,5	2777	1 099	1 285	2 384	0390
			(0 958)	(1 181)	(2 139)	(0218)
3	$\frac{2}{3}$	3045	0 968	1 181	2 149	0221
			(0 885)	(1 125)	(2 010)	(0129)
4	$\frac{3}{8}$	3229	0 894	1 128	2 022	0132
			(0 847)	(1 100)	(1 947)	(0089)
5	$\frac{3}{16}$	3671	0 851	1 099	1 950	0093

Diese Tabelle ist weniger instructiv, wie die vorhergehenden, doch widerspricht sie nicht der Annahme eines Schnittpunktes der beiden Curven  $\alpha_{15-25^\circ}$  bei  $x = \frac{1}{3}$ . Die sehr verdünnten Lösungen geben überhaupt wenig Anhaltspunkte, da ihre Mischungen wenig Contraction zeigen, und die Ausdehnungscoefficienten der letzteren von den arithmetischen Mitteln aus denjenigen der Einzellösungen nur um Grössen abweichen, welche innerhalb der Fehlergrenze des Versuches liegen. Ich habe aus diesem Grunde bei anderen Salzlösungen mich auf die Untersuchung der concentrirteren Lösungen beschränkt.

Aus sämtlichen Tabellen lässt sich nun der Schluss ziehen, dass diejenigen NaCl-, KCl-Lösungen, welche in der Volumeneinheit bei gegebener Temperatur eine gleiche Anzahl Grammmoleculé enthalten, in Bezug auf Dichte und Ausdehnungscoefficient als correspondirende Lösungen aufzufassen sind. Uebersichtlich geht dieses noch aus nachfolgender Tabelle hervor.

Tabelle 12.

 $\text{NaCl}_{(\mu)} + \text{KCl}_{(\mu)}$ .

$\mu$	$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$
4	—	—	(1 827) 0,001 825	—	—
3,5	96,2889	(1 693) 0,001 697	(1 787) 1 782	(3 480) 0,003 479	(1,1431) 1,1434
3	3033	(1 629) 1 630	(1 728) 1 724	(3 357) 3 354	(1240) 1242
2,5	3123	(1 539) 1 539	(1 658) 1 652	(3 197) 3 191	(1031) 1032
2	3431	(1 442) 1 436	(1 578) 1 578	(3 020) 3 014	(9837) 9838
1,5	3032	(1 318) 1 319	(1 476) 1 475	(2 794) 2 794	(9632) 9634
1	3375	(1 163) 1 158	(1 351) 1 349	(2 514) 2 507	(9421) 9422

Sämmtliche, in vorhergehenden Tabellen beschriebenen Mischungen waren durch Mischen gleicher Raumtheile der einzelnen Lösungen bei  $15^\circ$  C. erhalten worden. Zu demselben Resultat hätte man auch durch Wahl eines jeden anderen Mischungsverhältnisses gelangen müssen. Bei correspondirenden Lösungen stimmen dann die, als arithmetisches Mittel berechneten Werthe mit den, unabhängig von dem Mischungsverhältniss gefundenen, wie man aus nachfolgendem Beispiel entnehmen kann:

1 Raumtheil  $\text{NaCl}_{(\mu=3)}$  + 3 Raumtheile  $\text{KCl}_{(\mu=3)}$ .

$v_{15^\circ}$	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$d_{15^\circ}$
96,2534	(1 575) 0,001 571	(1 674) 0,001 675	(1,1279) 1,1280

Dass die correspondirenden Lösungen mit dem Sättigungsvermögen der Salze in keiner einfachen Beziehung stehen, folgt schon aus dem Vorhergehenden. Den directen Nachweis, dass zwei gesättigte Salzlösungen, hier KCl- und NaCl-Lösungen nicht als correspondirende aufzufassen sind, liefert nachfolgender Versuch.

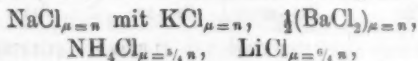
	$\alpha_{15-20^\circ}$	$\alpha_{20-25^\circ}$	$\alpha_{15-25^\circ}$
KCl bei $14,9^\circ$ C. gesättigt	(1 823)	(1 895)	(3 718)
+ NaCl bei $15^\circ$ C. „	0,001 829	0,001 913	0,003 742

13\*

Die Existenz solcher Lösungen, welche für die Dichte miteinander correspondiren, hat Kremers<sup>1)</sup> für  $(\text{NaCl}, \text{KNO}_3)$ ,  $(\text{NaCl}, \text{KCl})$ ,  $(\text{NaCl}, \text{NaNO}_3)$  gefunden. Seine Einzellösungen enthielten aber in 100 Theilen Wasser eine bestimmte Anzahl Salzmoecüle. Wie oben schon erwähnt, halte ich diesen Vergleichungsmaassstab der Lösungen unter einander nicht für den richtigen. Wenn nun dem ungeachtet die Gesetzmässigkeiten über die Dichte derselben mehr oder weniger auch an solchen Lösungen hervortreten, so beruht diese auf den geringen Aenderungen, welche die Dichte mit der Concentration erfährt. Zur Entscheidung dieser Frage eignet sich daher die Dichte viel weniger, als der Ausdehnungscoefficient.

Die Kenntniss der correspondirenden Lösungen kann auch dazu dienen, die physikalischen Constanten sehr concentrirter Lösungen zu bestimmen, welche einzeln in Lösung nicht existiren können, aber in ihren Mischungen sich in Lösungen von hohem Concentrationsgrade erhalten lassen. So kann man z. B. zwar eine Lösung von 5 g Moecüle  $\text{NaCl}$  in 1 l darstellen, nicht aber eine solche 5 g Moecüle  $\text{KCl}$  in 1 l bei  $15^\circ \text{C}$ ., es lässt sich aber sehr wohl ein Gemenge aus der angegebenen Quantität beider Salze in 2 l Wasser lösen. Mit einiger Wahrscheinlichkeit lassen sich alsdann Dichte und Ausdehnungscoefficient der einzelnen Lösungen aus den gefundenen Werthen berechnen.

Von sämmtlichen bis jetzt untersuchten Salzlösungen habe ich gefunden, dass miteinander correspondiren:



und zwar die drei ersten mit Sicherheit, die beiden letzten mit grosser Wahrscheinlichkeit. Jede der angegebenen Lösungen correspondirt mit sämmtlichen übrigen, und auch für die Mischungen aus den drei ersten Salzlösungen wurde gefunden, dass die angegebenen physikalischen Constanten ohne Aenderung ihres Werthes in die Mischung eintreten.

Es ist sehr wohl möglich und sogar wahrscheinlich, dass nicht nur Dichte und Ausdehnungscoefficient, sondern auch

1) Kremers, Pogg. Ann. 98. p. 58. 1856.

andere physikalische Constanten die nämlichen correspondirenden Lösungen haben. Versuche in dieser Richtung werde ich zunächst für die Flüssigkeitsreibung der Salzlösungen und ihrer Gemische beim Ausströmen aus Capillarröhren anstellen.

Zum Schlusse möchte ich die Vermuthung aussprechen, dass das Studium der Ausdehnung solcher Salzlösungsgemische, in welchen eine doppelte Zersetzung möglich ist, diese Zersetzung voraussichtlich in ganz der nämlichen Weise zu ermitteln gestattet, wie dies so weitgehend durch Thom- sen aus den Wärmereactionen und durch Ostwald aus den Dichteänderungen der Lösungsgemische geschehen ist. Da- hin zielende Versuche gedenke ich später zu veröffentlichen.

### 3. Die correspondirenden NaCl- und KCl-Lösungen für electrischen Leitungswiderstand und electrisches Leitungsvermögen.

#### a) Die Lösungen einzeln.

Die Bestimmung des Leitungswiderstandes der Electrolyte ist durch die hervorragenden Untersuchungen von F. Kohl- rausch<sup>1)</sup> und die Einfachheit, welche dieser Forscher der Me- thode gab, eine ebenso scharfe, als leicht anwendbare geworden. Ich bediente mich bei den nachfolgenden Untersuchungen der Wechselströme, des Telephons<sup>2)</sup> und der Brücke. Da meine von Edelman in München bezogene Widerstandsscala nur eine ganze Anzahl S.-E. direct zu messen erlaubte, musste durch Verschieben des Steges  $s$  in Fig. 3<sub>a</sub> der Ton im Tele- phon zum Verschwinden gebracht werden.

Zur Bestimmung der Capacität der angewandten Wider- standsgefäße diente mir eine bei 15° C. gesättigte, chemisch reine Kochsalzlösung von dem specifischen Gewichte 1,2014 bei 15° C. Für diese gibt F. Kohlrausch<sup>3)</sup> das specifische Leitungsvermögen an:

$$k = 0,000\,020\,15 + 0,000\,000\,45 (t - 18^\circ).$$

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 1—51 und 145—210. 1879.

2) Die Apparate sind nach den Angaben F. Kohlrausch's von E. Hartmann in Würzburg construiert.

3) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 660. 1879.



Im ganzen genommen dürften die Widerstände in den später folgenden Tabellen um etwa 0,2—0,3% ungenau sein, wobei übrigens bemerkt werden möge, dass für die sehr verdünnten Lösungen eine etwas grössere Ungenauigkeit angenommen werden muss.

In den ersten Momenten des Durchleitens des Wechselstromes durch den Electrolyten ist der gefundene Widerstand um 0,2% des ganzen Widerstandes kleiner, als der spätere bleibende. Gegen diesen Fehler kann man sich durch die Versuchsdauer schützen, welche bei mir nie unter einer halben Stunde währte.

Völlig luftfreie Lösungen anzuwenden, ist bei der Bestimmung des electrischen Leitungswiderstandes nicht erforderlich. Ich habe mich durch directe Versuche davon überzeugt und daher stets diejenigen Lösungen einfach dem Versuch unterworfen, welche früher zur Bestimmung der Dichte und des Ausdehnungscoefficienten gedient hatten.

Während des Versuches befand sich das Widerstandsgefäss in dem oben beschriebenen grossen Wasserbad, dessen Temperatur möglichst constant auf 18° C. erhalten wurde. Schwankungen von höchstens 0,1° C. kamen vor, da jedoch die Temperaturfunction für die untersuchten Lösungen nach den Versuchen von F. Kohlrausch den Werth von 0,0234 nicht übersteigt, so fallen diese Correctionen noch in die Fehlergrenzen des Versuches und wurden daher unterlassen.

Die für die einzelnen, einfachen Lösungen gefundenen Werthe des electrischen Leitungswiderstandes und der Leitungsfähigkeit stimmen im allgemeinen mit den von F. Kohlrausch<sup>1)</sup> angegebenen überein. Die Werthe dieses Forschers sind in den Tabellen 1 und 2 durch Einklammerung kenntlich gemacht. Wo die Differenzen gross waren, habe ich meine Untersuchung wiederholt. Ich möchte diese Differenzen dem Umstande zuschreiben, dass Herr Kohlrausch interpolirte Werthe angibt, während die meinigen direct aus den Lösungen von der angegebenen Concentration gewonnen wurden. Weiter bemerke ich, dass genannter Forscher sich auf Lösungen bezieht, welche bei 18° C. in der Volumeneinheit eine

<sup>1)</sup> F. Kohlrausch, l. c. p. 143.

bestimmte Anzahl von Grammmoleculen enthalten, während meine Lösungen bei der Temperatur 15° C. die angegebene Moleculzahl in der Volumeneinheit der Lösung besitzen. Allgemein will ich bemerken, dass die KCl- und NaCl-Curven, welche die Beziehungen zwischen Moleculzahl und Leitungsvermögen darstellen, bei der Wahl der Werthe von Kohlrausch sich weniger stark krümmen, als nach meinen Bestimmungen. Für sehr concentrirte Lösungen stimmen die beiden Angaben wieder überein.

Tabelle 1.<sup>1)</sup>

KCl = 74,58.

Nr.	Moleculzahl $\mu$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$	Nr.	Moleculzahl $\mu$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$
1	$\frac{3}{16}$	5283	189	7	2	574	(1728)
2	$\frac{2}{3}$	2778	360				1741
3	$\frac{1}{3}$	1410	709	8	2,5	475	(2112)
			(471)				2106
4	$\frac{1}{4}$	2093	478	9	3	403	(2480)
			(911)				2484
5	1	1092	916				(2822)
			(1328)	10	3,5	355	2820
6 <sup>2)</sup>	1,5	734	1362	11	4	320	3128

Das Leitungsvermögen der verdünnten KCl-Lösungen von  $\mu = \frac{3}{4}$  an abwärts lässt sich sehr genau darstellen durch:  $k_{18} \cdot 10^3 = c_1 + \mu c_2$ , wobei  $c_1 = 18$  und  $c_2 = 912$ .

Tabelle 2.

NaCl = 58,5.

Nr.	$\mu$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 18^3$	Nr.	$\mu$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$
1	0,25	4863	296				(1412)
			(380)	6	2,5	705	1425
2	0,5	2581	388				(1584)
			(698)	7	3	629	1594
3	1	1425	702				(1728)
			(974)	8	3,5	573	1745
4	1,5	1023	977				(1846)
			(1209)	9	4	524	1845
5	2	822	1217				

1) Die eingeklammerten Werthe sind die von Hrn. F. Kohlrausch gefundenen.

2)  $w_{18}$  bedeutet den spec. Leitungswiderstand bei 18° C.

3) Aus vier Versuchen und zwei verschiedenen Lösungen.

## b) Mischungen gleicher Raumtheile der Lösungen.

In den nachfolgenden Tabellen bedeuten, ebenso wie früher, die eingeklammerten Zahlenwerthe die arithmetischen Mittel aus den Werthen der, in der Mischung vorhandenen Einzellösungen.

Tabelle 3.<sup>1)</sup>NaCl( $\mu = \frac{1}{2}$ ) + KCl( $\mu = x$ ).

Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^8$	Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^8$
1	$\frac{2}{5}$	(3875)	(291)	4	$\frac{2}{3}$	(1996)	(548)
		3438	291			1836	545
		(2679)	(374)			(1857)	(875)
2	$\frac{3}{8}$	2654	377	5	$\frac{3}{4}$	1154	866
		(2318)	(437)			(1492)	(1436)
		2295	436			680	1471
3	$\frac{1}{2}$			6	$\frac{3}{2}$		

Der gefundene Widerstand ist stets kleiner als der aus den einzelnen Lösungen berechnete, er kommt ihm bei  $x = \frac{2}{3}$  und  $x = \frac{1}{2}$  jedoch am nächsten. Das gefundene Leitungsvermögen ist theils grösser, theils kleiner, wie das berechnete, jedoch geben die verdünnten Lösungen hier wenig Unterschiede. Ein allgemeines Gesetz lässt sich aus diesen vorläufig noch nicht mit Sicherheit ableiten.

Tabelle 4.

NaCl( $\mu = 1$ ) + KCl( $\mu = x$ ).

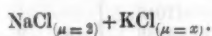
Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^8$	Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^8$
1	$\frac{2}{5}$	(3297)	(448)	5	1,5	(1079)	(1032)
		2262	442			986	1014
		(2101)	(531)			(999)	(1222)
2	$\frac{3}{8}$	1832	546	6	2	817	1224
		(1418)	(706)			(913)	(1593)
		1415	707			(625)	1600
3	$\frac{1}{2}$	(1252)	(814)	7	3		
		1245	814)				

Die Curve der berechneten Werthe der Widerstände kommt derjenigen der gefundenen Werthe bei  $x = \frac{2}{3}$  am nächsten. Hierfür stimmen auch die berechneten und gefundenen Leitungsvermögen miteinander überein. Die be-

1) KCl $_{\mu = \frac{1}{2}}$  wurde durch Verdünnen der Lösung KCl $_{\mu = 1}$  erhalten.

rechneten Werthe der Widerstände sind sonst durchweg grösser, wie die gefundenen.

Tabelle 5. Fig. 3.

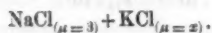


Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$	Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$
1	$\frac{3}{5}$	(2996) 1288 (1800)	(705) 776 (789)	5	2	(698) 686 (649)	(1479) 1458 (1659)
2	$\frac{2}{3}$	1168 (951)	856 (1072)	6	2,5	612 (612)	1635 (1851)
3	1	922 (778)	1085 (1289)	7	3	546 588	1832 (2019)
4	1,5	778	1283	8	3,5	(503)	1989

Die berechneten Werthe und die gefundenen Werthe des Leitungswiderstandes und des Leitungsvermögens stimmen für  $x = 1,5$  miteinander überein. Die ausgezogenen und punktirtten Curven des Leitungswiderstandes Fig. 3 berühren sich in diesem Punkte, diejenigen des Leitungsvermögens schneiden sich daselbst.

Die aus Tabelle 5 beobachteten correspondirenden Lösungen sind also  $\text{NaCl}_{\mu=2}$ ,  $\text{KCl}_{\mu=\frac{1}{2}}$ . Dieses Concentrationsverhältniss wird durch nachfolgende Tabellen weiter begründet.

Tabelle 6. Fig. 4.



Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$	Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$
1	1	(854) 751 (681)	(1260) 1332 (1478)	4	2,5	(552) 541 (516)	(1850) 1848 (2039)
2	1,5	664 (602)	1506 (1668)	5	3	499 (492)	2003 (2207)
3	2	597	1674	6	3,5	463	2161

Die Curven des Leitungsvermögens schneiden sich zwischen  $x = 2$  und  $x = 2\frac{1}{2}$ ; für  $x = 2\frac{1}{2}$  stimmen Leitungsvermögen und Leitungswiderstand innerhalb der Versuchsfehlergrenzen mit den berechneten Werthen überein.

Tabelle 7. Fig. 5.

 $\text{NaCl}_{(\mu=4)} + \text{KCl}_{(\mu=x)}$ 

Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^5$	Nr.	$x$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^5$
1	$\frac{3}{8}$	(2856)	(1019)	6	2	(558)	(1798)
		776	1289			539	1857
		(1660)	(1103)			(509)	(1976)
2	$\frac{2}{3}$	732	1367	7	2,5	500	2001
		(976)	(1277)			(472)	(2165)
3	$\frac{1}{2}$	677	1476	8	3	461	2167
		(811)	(1386)			(448)	(2339)
4	1	645	1551	9	3,5	435	2300
		(638)	(1604)			(432)	(2487)
5	1,5	585	1709	10	4	412	2428

Die für Leitungswiderstand und Leitungsvermögen correspondirenden Lösungen dieser Tabelle sind  $\text{NaCl}_{\mu=4}$ ;  $\text{KCl}_{\mu=3}$ .

Es ist also durch vorliegende Untersuchung bewiesen, dass die für das electriche Leitungsvermögen und den electriche Leitungswiderstand correspondirenden Lösungen von  $\text{NaCl}$  und  $\text{KCl}$  in dem Molecülzahlverhältniss 4:3 stehen. Dieses Verhältniss findet durch alle Concentrationen hindurch statt.

Wir geben in nachfolgender Tabelle eine Zusammenstellung der bis jetzt untersuchten correspondirenden Lösungen beider Salze.

Tabelle 8.

 $\text{NaCl}_{(\mu=m)} + \text{KCl}_{(\mu=\frac{3}{4}m)}$  (Correspondirende Lösungen.)

Nr.	$\text{NaCl}_{\mu=}$	$\text{KCl}_{\mu=}$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^5$	Bemerkungen
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	(2679)	(374)	Tabelle 3 Nr. 2
			2654	377	
			(1418)	(706)	
2	1	$\frac{3}{4}$	1415	707	" 4 " 3
			(778)	(1289)	
3	2	$\frac{3}{2}$	778	1283	" 5 " 4
			(577)	(1770)	
4	3	$2\frac{1}{4}$	569	1773	aus " 6 " 3 u. 4 interpolirt
			(472)	(2165)	
5	4	3	461	2167	" 7 " 8

Die correspondirenden Lösungen von  $\text{NaCl}$  und  $\text{KCl}$  für das electriche Leitungsvermögen und den electriche Leitungswiderstand enthalten also nicht, wie wir früher für Dichte und Ausdehnung gefunden hatten, gleiche Molecülzahlen.

Um jeden Zweifel auszuschliessen, gedanke ich noch eines Versuches mit 30 ccm  $\text{NaCl}_{\mu=2} + 90 \text{ ccm } \text{KCl}_{(\mu=1/2)}$ , welcher ergab:

$w_{18} \cdot 10^{-2}$	(756)	752
$k_{18} \cdot 10^3$	(1326)	1330

und durch welchen gleichzeitig bewiesen ist, dass die correspondirenden Lösungen für ein beliebiges Mischungsverhältniss die gleichen Eigenschaften haben.

Gewisse Berührungspunkte finden zwischen der Ausdehnung und dem electrischen Leitungsvermögen statt.

Wie aus den Curven Fig. 1 hervorgeht, nimmt der Ausdehnungscoefficient  $\alpha_{15-20^\circ}$  oder  $\alpha_{20-25^\circ}$  mit wachsendem Salzgehalt anfänglich rasch zu, später aber wesentlich langsamer. Ein Blick auf diejenigen Curven, durch welche das electrische Leitungsvermögen dargestellt wird<sup>1)</sup>, zeigt damit eine auffallende Aehnlichkeit. Diese dürfte noch mehr hervorgehen aus Lösungen von solchen Salzen, welchen eine fast unbegrenzte Löslichkeit zukommt, wie aus den Chlorlithiumlösungen. Die Curve  $\text{LiCl } \alpha_{20-25^\circ}$  lässt beispielsweise von  $\mu = 5$  an ein schwaches Sinken des Ausdehnungscoefficienten beobachten. Das electrische Leitungsvermögen der  $\text{LiCl}$ -Lösungen nimmt von der Concentration  $\mu = 6$  an ab.

Indem ich theoretische Erörterungen bis zur vollständigen Untersuchung des electrischen Leitungsvermögens sehr verdünnter Lösungen (über welche E. Bouty<sup>2)</sup> neuerdings publicirt hat), und ihrer Gemische verschiebe, bemerke ich, dass bis jetzt folgende untereinander correspondirende Lösungen gefunden wurden:

$\text{NH}_4\text{Cl}_{\mu=1/n}$ ;  $\text{KCl}_{\mu=1/n}$ ;  $\text{NaCl}_{\mu=n}$ ;  $\frac{1}{2}(\text{BaCl}_2)_{\mu=n}$ , wobei  $n$  jede, für alle diese Lösungen gleiche, ganze oder gebrochene positive Zahl bedeuten kann. Es correspondirt hierbei jede Lösung mit der anderen hier angegebenen.

Aus den vorliegenden Resultaten scheint der später noch weiter zu begründende Satz hervorzugehen:

Correspondirende Lösungen sind solche, deren Moleculzahl in einem einfachen Verhältniss zu einander stehen.

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. Taf. I. 1879.

2) E. Bouty, Compt. rend. 98. p. 140-142; 362-365. 1884.

V. *Ueber Probleme, welche die Neumann'sche Reflexionstheorie nicht lösen zu können scheint. Die Metall- und Totalreflexion der doppeltbrechenden Medien; von E. Ketteler.*

Sieht man ab von der Erklärung der Phosphorescenz und Fluorescenz, so dürfte sich die höchste und letzte Aufgabe, die der theoretischen Optik gestellt werden kann, wohl folgendermassen aussprechen lassen. Man denke sich zwei Prismen, sei es aus irgend welchen trichroitischen und zugleich mit Dispersion der Axen begabten Krystallen oder aus irgend welchen dichroitischen und durch Rotationspolarisation ausgezeichneten Krystallen beliebig hergestellt, und beide miteinander zu einer beliebig orientirten Combination verbunden. Es sollen alsdann sämmtliche, einem beliebigen Einfallswinkel entsprechende äussere und innere Wellen construirt, die zugehörigen Refractions- und Extinctionscoëfficienten für alle Farben bestimmt und endlich die Amplituden und Phasen aller dieser Wellen berechnet werden.

Der Verfasser dieses Aufsatzes, welchem das vorstehend gezeichnete Problem seit Jahren vorgeschwebt, und welcher nach vieljährigen, nicht immer sofort von Erfolg gekrönten Bemühungen nunmehr die Lösung desselben endgültig gefunden zu haben glaubt, wird Inhalt, Fruchtbarkeit und Tragweite derselben nicht anschaulicher vorführen können, als wenn er ein direct der Theorie fast unzugängliches Erscheinungsgebiet, die Totalreflexion der anisotropen Medien, auf einem vielleicht sonderbar scheinenden Umwege, nämlich unter Benutzung der undurchsichtigen krystallisirten Metalle, zur streng mathematischen Darstellung bringt. Da der Neumann'schen Reflexionstheorie dieses indirecte Verfahren versagt ist, und da sie, soweit ich sehe, bei directem Angreifen mit weit grösseren Schwierigkeiten zu kämpfen haben würde, als der von mir erweiterte Fresnel'sche Standpunkt, so dürfte die Totalreflexion der Krystalle wie keine andere Erscheinung berufen sein, bei der neuerdings begonnenen Auseinandersetzung zwischen beiden Grundanschauungen selbst denen gegenüber, welche die Erklärung



der Metallreflexion, resp. Absorption noch für verfrüht halten, ein entscheidendes Wort mitzusprechen.

Es ist übrigens nicht das erste mal, dass ich Totalreflexion und Metallreflexion in Verbindung bringe. Für isotrope Medien habe ich ihren Zusammenhang schon früher in zwei Arbeiten<sup>1)</sup> aufgedeckt, die leider wohl aus secundären Gründen nicht die von mir gewünschte Verbreitung gefunden haben. Es sei mir daher zunächst gestattet, aus meinem damaligen Auszuge folgenden, den Schwerpunkt der Arbeit entwickelnden Passus hier wörtlich zu reproduciren:

„Fresnel hat die Gesetze der Totalreflexion mittelst eigenthümlicher Deutung seiner für totalreflectirende Incidenzen complex werdenden Intensitätsformeln abgeleitet. Ihm erscheint so die Totalreflexion neben der gewöhnlichen Reflexion als ein und derselbe Vorgang, da beide durch die gleichen Ausdrücke umfasst werden und unmittelbar ineinander verwandelbar sind. Diese Auffassung bleibt natürlich bestehen, wenn man den gleichfalls complex werdenden Schwingungsaus Schlag des gebrochenen Lichtes auf Ausdrücke mit Exponentialfactoren zurückführt, in diesen aber die imaginären Glieder beibehält.“

„Sobald man aber im Interesse der physikalischen Erklärung sich ausschliesslich auf reelle Glieder beschränkt, so wird damit das erwähnte Einheitsband zerrissen, und Totalreflexion und gewöhnliche Reflexion erscheinen unstatthafterweiser als selbständige Vorgänge.“<sup>2)</sup>

„In der That freilich — und das war der Inhalt des damaligen Aufsatzes — bilden die Fresnel'schen Gesetze der totalen wie der gewöhnlichen Reflexion einen speciellen ein-

1) Ketteler, Carl's Repert. 16. p. 261. 1880. — Beibl. 4. p. 879 1880. Ausz. d. Verf.

2) Dies war der Standpunkt Cauchy's und Beer's, für den ich indess insofern (Wied. Ann. 3. p. 88. 1878) eine Lücke ausgefüllt habe, als ich dort zeigte, dass die in Betracht kommenden, theilweise verwickelten Schwingungsausdrücke aus den Differentialgleichungen der bezüglichen Medien abzuleiten sind. Hr. Glazebrook (und so eben theilweise auch Hr. Voigt) hat die Möglichkeit dieses Standpunktes auch für die Vertreter der Neumann'schen Grundvorstellungen nachgewiesen. Vgl. die Nachschrift.

zeln Grenzfall der Gesetze der Reflexion an absorbirenden Medien. Diese letzteren, die der Verfasser bereits früher<sup>1)</sup> streng und erschöpfend behandelt zu haben glaubt, involviren bekanntlich einen vom Einfallswinkel abhängigen Refractions- und Extinctionscoefficienten, wie ihn die Totalreflexion, von niemand mehr bezweifelt, wirklich vorführt.<sup>2)</sup> Die absorbirenden Medien sind eben die allgemeineren und, vom Weltäther abgesehen, die einzig thatsächlichen, während dagegen das ideel durchsichtige Mittel Fresnel's mit seinem doppelten Verhalten und seinem discontinuirlichen Sprung (für die Incidenz des Grenzwinkels) lediglich als eine durch Abstraction zu gewinnende Möglichkeit aufzufassen ist.“

Meine Arbeit, die nur stetig verlaufende Formeln gibt, welche das ganze Erscheinungsgebiet zwischen normaler und streifender Incidenz umfassen, hat sonach das erwähnte Ein-

1) Ketteler, Wied. Ann. **8**. p. 95 u. 284. 1878.

2) In einem eben erschienenen Referate der Berl. Fortschritte **36**. p. 382. 1883 über meine Arbeiten, betreffend den Zusammenhang von Metall- und Totalreflexion, wird auffallend stark betont, dass ich in den absorbirenden Medien Refractions- und Extinctionscoefficient variabel nehme, was eben daher rührt, dass ich Extinctionsrichtung und Loth immer zusammenfallen lasse. Es macht das fast den Eindruck, als solle angedeutet werden, dass auch eine andere Auffassungsweise möglich sei, also die meinige wenigstens bis zu ihrer näheren Begründung als willkürlich bezeichnet werden müsse. Da diesen selben Vorwurf auch Hr. Lommel einst gelegentlich ausgesprochen hat, so bemerke ich darüber kurz Folgendes. Die einzige Auffassung, die der meinigen entgegengestellt werden könnte, ist doch wohl nur die Annahme, dass in den absorbirenden Medien (wenigstens bei kleineren Incidenzen) Amplituden und Phasen gemeinsam längs der Fortpflanzungsrichtung selber variiren. Ich möchte nun die Vertheidiger dieser Annahme, die ich selbst nur für innerlich gespiegeltes Licht, nicht dagegen für gebrochenes Licht für möglich halte, ersuchen, deren Consequenzen für letzteres zu prüfen. Es genügen dazu bei Benutzung meiner Uebergangsgleichungen und unter Zuziehung des Incompressibilitätsprincips einige ausserordentlich einfache Rechnungen. Man findet dann z. B. für die Schwächungscoefficienten der Spiegelung sonderbar geformte Ausdrücke, welche in der Nähe des Grenzwinkels zu auffallenden Erscheinungen führen, die, ihre Realität vorausgesetzt, die Beobachtung längst hätte entdecken müssen. — Was übrigens bei einer solchen Behandlung für kleinere Incidenzen scheinbar an Einfachheit gewonnen wird, geht dann für die totalreflectirenden erst recht verloren.

heitsband zwischen der gewöhnlichen und totalen Reflexion der durchsichtigen Medien wieder hergestellt, und beide Erscheinungen werden zugleich mit den Reflexionserscheinungen der undurchsichtigen Metalle durch identische Ausdrücke dargestellt. Kann die Neumann'sche Reflexionstheorie von dem eben erst durch Glazebrook und Voigt für sie gewonnenen, aber nicht genügenden Standpunkte aus nicht bald den gleichen Schritt thun, so dürfte es für immer um ihre Anerkennung geschehen sein.

Nach diesen, meines Erachtens nothwendigen orientirenden Vorbemerkungen wende ich mich zur vorgesteckten Aufgabe, die für die isotropen Medien soeben skizzirten Resultate auch auf die anisotropen auszudehnen. Zuvor werde nur noch bemerkt, dass, was ich bisher an anderer Stelle<sup>1)</sup> über die Totalreflexion der Krystalle mitgetheilt habe, sich ausschliesslich auf die Bedingung ihres Zustandekommens bezog und sich etwa in die Worte zusammenfassen lässt: „Es muss stets der gebrochene Strahl, nicht dagegen auch die gebrochene Normalrichtung der Trennungsfläche parallel sein.“ Der Einfachheit wegen soll sich die folgende Discussion auf absorbirende gewöhnliche Krystalle, d. h. auf solche ohne Dispersion der Axen und ohne Rotationspolarisation beschränken.

Denken wir uns zunächst einen durchsichtigen Krystall von parallelen Strahlen durchlaufen, so erfahren dieselben für verschiedene Richtungen eine verschieden geschwinde Fortpflanzung der Phasen. Auch ein einzelner Strahl, den wir etwa durch eine unendlich enge cylindrische Röhre von den übrigen isoliren, wird ungeschwächt (unter Constant-erhaltung seiner Amplitude) durch dieselbe hindurchgehen und seine Energie auf immer weitere Punkte übertragen. Wir nehmen dabei an, dass die Schwingungen, wenn extraordinär (wie Fresnel es will), im Hauptschnitt erfolgen, aber auf dem Strahle selbst (nicht auf der zugehörigen Normalen) senkrecht stehen, während sie bekanntlich nach Neumann zugleich auf Hauptschnitt und Strahl senkrecht stehen

1) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 653. 1888.

sollen. Diese Annahme, für die Anhänger der Fresnel'schen Richtung die einzig correcte, stelle ich hier nicht willkürlich auf, sondern sie ist mir durch die mühsam gefundene Thatsache, dass jede andere Voraussetzung zu unmöglichen oder wenigstens unwahrscheinlichen Resultaten führt, allmählich aufgezwungen.<sup>1)</sup>

Dies angenommen, beschränken wir uns im Folgenden auf die Lichtverbreitung durch (ideelle) enge Röhren; es ist dies nämlich diejenige Form, welche — abgesehen vom vorausgesetzten Huygens'schen Princip — in den Grenzgleichungen der Reflexionstheorie ausschliesslich von Bedeutung ist. Die zu untersuchenden Medien sollen dabei absorbirende sein, d. h. Medien, in welchen gewisse innere Reibungskräfte die ursprünglich gegebene Amplitude fort und fort verkleinern.

Dringt dann Licht von aussen her in einen absorbirenden Krystall ein, so werden sofort zwei zusammengehörige Richtungen zu unterscheiden sein, nämlich die Propagationsrichtung (senkrecht zur Ebene gleicher Phasen, parallel also dem Strahle als der Röhrenaxe) und die Extinctionsnormale (senkrecht zur Ebene gleicher Amplituden, parallel also dem Einfallslothe). Fallen zunächst für senkrechten Eintritt des Lichtes Extinctions- und Propagationsrichtung zusammen, so heisse  $a$  das einer bestimmten Krystallrichtung und Schwingungsdauer entsprechende Verhältniss der Propagationsgeschwindigkeiten im freien Aether und im Krystall und  $b$  der zugehörige Extinctionscoefficient, letzterer als Maass für die Geschwindigkeit der Abnahme der Amplitude. Die beiden so definirten Grössen  $a$  und  $b$  betrachten wir als Functionen der Strahlenrichtung und Schwingungsdauer und nennen sie die Hauptindices der betreffenden Richtung.

Wird aber bei unveränderter Schwingungsdauer und bei festgehaltener Strahl- und Krystallrichtung die Eintrittsfläche continuirlich gegen dieselbe gedreht, sodass sich also die Winkel, welche einfallender und gebrochener Strahl mit dem Einfallslothe machen, stetig ändern, so ändern

1) Vgl. darüber Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 636. 1883.

sich auch die beiden erwähnten Geschwindigkeiten, und aus  $a$  und  $b$  mögen etwa für irgend einen Brechungswinkel  $r$  des Strahles die neuen Werthe  $v$  und  $q$  werden.

Es lassen sich dann, meinen früheren Arbeiten zufolge<sup>1)</sup>, für isotrope wie für anisotrope Medien, dieselben als Aggregate von zusammenschwingenden Aether- und Körpertheilchen betrachtet, Bewegungsgleichungen aufstellen, welche zwischen den Attributen  $a$ ,  $b$  und  $v$ ,  $q$  die Bedingungen<sup>2)</sup> verlangen:

$$(I_a) \quad v^2 - q^2 - 1 = (a^2 - b^2 - 1) \Phi, \quad vq \cos r = ab \Phi.$$

Darin ist noch  $\Phi$  ein vom Einfallswinkel abhängiger Bruch, welcher für senkrechte Incidenz gleich Eins wird. Derselbe ist insbesondere für absorbirende isotrope, sowie für durchsichtige anisotrope Medien bei allen Incidenzen  $= 1$ , und kommt daher die Differenz  $(1 - \Phi)$  nur für Medien, die zugleich stark absorbiren und stark doppelt brechen, als solche in Betracht. Für alle anderen dagegen schreibt sich einfacher:

$$(I) \quad v^2 - q^2 = a^2 - b^2, \quad vq \cos r = ab.$$

Löst man diese letzteren Gleichungen in Beziehung auf  $v$  und  $q$  auf, sodass man erhält:

$$2v^2 = + (a^2 - b^2) + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 \operatorname{tg}^2 r},$$

$$2q^2 = - (a^2 - b^2) + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 \operatorname{tg}^2 r},$$

so sieht man, dass beide mit Zunahme von  $r$  bis zur Unendlichkeit ansteigen.

Was endlich das den Lichtübergang vermittelnde Huygens'sche Princip betrifft, so heisse  $E$  der Einfallswinkel im Weltäther (resp. Luft),  $r_n$  der Brechungswinkel der sich dem Strahle zuordnenden Normale und  $v_n$  das entsprechende Brechungsverhältniss. Alsdann ist bekanntlich zu setzen:

$$\frac{\sin E}{\sin r_n} = \frac{v}{\cos \delta} = v_n,$$

1) Vgl. z. B. Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 646. 1883.

2) Ich benutze diese Gelegenheit, um einen bisher dunkel gebliebenen Punkt (p. 651) durch directe Heranziehung der Incompressibilitätsbedingung durch vorstehende genauere Fassung aufzuhellen.

wenn  $\delta$  den Winkel bedeutet zwischen Strahl und Normale. Versteht man noch unter  $\psi$  den Flächenwinkel zwischen der Ebene von Strahl und Loth und der Einfallsebene, so ist der Zusammenhang zwischen  $r_n$  und  $r$  durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(II) \quad \cos \delta = \cos r \cos r_n + \sin r \sin r_n \cos \psi.$$

Eine für die Anwendung bequemere Form der bisherigen Ausdrücke erhält man durch Einführung eines dem Einfallswinkel  $E$  verwandten Winkels  $J$  und einer Hilfsgrösse  $p$ , die beide definit sein durch die Beziehungen:

$$(1) \quad v \cos r = \sqrt{v^2 - \sin^2 J} = p, \quad \sin J = v \sin r.$$

Da wir im Folgenden speciell die Totalreflexion an einem anisotropen Medium untersuchen, so muss dasselbe entweder optisch dünner sein, als die Luft, oder man muss diese wie beim Kohlrausch'schen Totalreflectometer durch ein dichteres (isotropes) Medium ersetzen. Betrachten wir dasselbe als genügend durchsichtig, um seinen Extinctionscoëfficienten  $b_1 = 0$  setzen zu können, so wird der absolute Refractionscoëfficient desselben  $a_1 = n_1$  constant. Die Einfallswinkel  $E$  und  $J$  des Weltäthers hängen dann aber mit dem thatsächlichen Einfallswinkel  $e$  und einem virtuellen  $i$  im Innern dieses Mediums zusammen durch die Gleichungen:

$$\sin E = n_1 \sin e, \quad \sin J = n_1 \sin i.$$

Wir wollen jetzt diese neuen Winkel in die Ausdrücke (I) und (II) einführen und erhalten durch einfache Rechnungen:

$$(2) \quad \begin{cases} 2p^2 = +(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i) + \sqrt{(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i)^2 + 4a^2 b^2}, \\ 2q^2 = -(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i) + \sqrt{(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i)^2 + 4a^2 b^2}, \\ 2v^2 = +(a^2 - b^2 + n_1^2 \sin^2 i) + \sqrt{(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i)^2 + 4a^2 b^2}, \end{cases}$$

Werthe, in welchen die Wurzelgrösse stets mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist.

Ferner:

$$(3) \quad n_1^3 \sin i \sin e \cos \psi = v^2 - p \sqrt{v_n^2 - n_1^2 \sin^2 e}.$$

Was jetzt weiter die Grenz- oder Uebergangsbedingungen betrifft, so denken wir uns die ebene Trennungsfläche beider



Medien als die  $XY$ -Ebene eines Coordinatensystemes, dessen  $Z$ -Axe sonach mit der Richtung des Lothes zusammenfällt. Alsdann sind diese Bedingungen die folgenden vier:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{d\xi_1}{dt} = \sum \frac{d\xi_2}{dt}, \quad \sum \frac{d\eta_1}{dt} = \sum \frac{d\eta_2}{dt} \\ \sum \left( \frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\xi_1}{dx} \right) = \sum \left( \frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\xi_2}{dx} \right) \\ \sum \left( \frac{d\eta_1}{dz} - \frac{d\eta_1}{dy} \right) = \sum \left( \frac{d\eta_2}{dz} - \frac{d\eta_2}{dy} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$$

Darin bedeuten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  die Schwingungscomponenten im Coordinatenanfangspunkt als Einfallspunkt, die angehängten Indices 1 und 2 beziehen sich auf das erste und zweite Mittel und die Summenzeichen auf die Zahl der vorhandenen Strahlen. Lassen wir fortan üblicher Weise die  $Y$ -Axe auf der Einfallsebene senkrecht stehen, bezeichnen mit  $\varrho^p$ ,  $\varrho^r$ , resp.  $\varrho_R^p$ ,  $\varrho_R^r$  die Ausschlagscomponenten des einfallenden und reflectirten Lichtes parallel und senkrecht zur Einfallsebene und mit  $\xi_D$ ,  $\eta_D$ ,  $\zeta_D$  die axialen Componenten der gebrochenen Strahlen, so werden dieselben dargestellt durch:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^p = \mathfrak{E}_p \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{n_1 (x \cos e + x \sin e)}{\lambda} \right), \\ \eta = \varrho^s = \mathfrak{E}_s \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{n_1 (x \cos e + x \sin e)}{\lambda} \right), \\ \varrho_R^p = \mathfrak{R}_p \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{n_1 (-x \cos e + x \sin e)}{\lambda} \right) - \pi - \chi_p \right], \\ \eta_R = \varrho_R^s = \mathfrak{R}_s \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{n_1 (-x \cos e + x \sin e)}{\lambda} \right) - \chi_s \right], \\ \xi_D = \mathfrak{D}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{v(ux + vy + wz)}{\lambda} \right) - \chi_x \right], \\ \eta_D = \mathfrak{D}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{v(ux + vy + wz)}{\lambda} \right) - \chi_y \right], \\ \zeta_D = \mathfrak{D}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{v(ux + vy + wz)}{\lambda} \right) - \chi_z \right], \end{array} \right.$$

wo noch  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die Richtungs cosinus der gebrochenen Strahlen sind.

Dazu treten für beide gebrochene Strahlen die Incompressibilitätsbedingungen:



$$(IV) \quad \frac{d\xi_D}{dx} + \frac{d\eta_D}{dy} + \frac{d\zeta_D}{dz} = 0.$$

Die Gesamtheit dieser Formeln umfasst die Probleme der sogenannten metallischen Spiegelung und Brechung, soweit dieselben von einem durchsichtigen Medium aus erfolgen.

Um nicht zu ausführlich zu werden, wollen wir uns auf die Vorgänge im Hauptschnitt beschränken, wollen etwa den Hauptschnitt mit der Einfallsebene zusammenfallen lassen, sodass nur ein gebrochener Strahl — der extraordinäre — zu Stande kommt. Dann dürfen wir insbesondere in den drei letzten der Ausdrücke (4) setzen:

$$(5) \quad \nu v = 0, \quad \nu u = n_1 \sin i, \quad \nu w = p,$$

und ausserdem  $\eta = \eta_R = \eta_D = 0$  nehmen.

Führt man unter diesen Bedingungen die Ausdrücke (4) in die Gleichungen (III), (IV) ein und eliminirt in bekannter Weise die laufende Zeit, so erhält man ohne Schwierigkeit für Amplitude und Phasenänderung des gespiegelten Lichtes die folgenden Werthe:

$$(6a) \quad \Re_p^2 = \frac{[p n_1 - (\nu^2 - q^2) \cos e]^2 + q^2 (n_1 - 2p \cos e)^2}{[p n_1 + (\nu^2 - q^2) \cos e]^2 + q^2 (n_1 + 2p \cos e)^2},$$

oder kürzer:

$$(6) \quad \frac{\mathfrak{E}_p^2 - \Re_p^2}{\mathfrak{E}_p^2 + \Re_p^2} = \frac{2p n_1 \cos e [n_1^2 \sin^2 i + (p^2 + q^2)]}{(p^2 + q^2) n_1^2 + \cos^2 e [(\nu^2 - q^2)^2 + 4p^2 q^2]},$$

und dazu:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \chi_p = \frac{2q n_1 \cos e [n_1^2 \sin^2 i - (p^2 - q^2)]}{(p^2 + q^2) n_1^2 - \cos^2 e [(\nu^2 - q^2)^2 + 4p^2 q^2]}.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für den gebrochenen Strahl, doch gehe ich hier nicht näher auf dieselben ein.<sup>1)</sup>

Wie aus Vorstehendem hervorgeht, verlaufen in anisotropen absorbirenden Medien die einer gegebenen Richtung

1) Die Formeln des Textes werden bekanntlich für isotrope Medien mit den von Cauchy gegebenen identisch, sobald man setzt:

$$p = c \vartheta \cos(e + u), \quad q = c \vartheta \sin(e + u) \\ a = \vartheta \cos e, \quad b = \vartheta \sin e.$$

Dasselbe gilt von den bezüglichen Ausdrücken der Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

sich zuordnenden  $p, q, v$  und darum weiter auch die  $\mathcal{R}, \chi$  als stetige Functionen des Einfallswinkels  $e$ , resp. der Winkel  $e$  und  $i$  ohne alle Discontinuität. Eine totale Reflexion ist daher im allgemeinen, d. h. bei gegebener Charakteristik  $(a, b)$  nur möglich für  $e = 90^\circ$ , also bei streifender Incidenz.

Im besonderen ist das Zustandekommen derselben geknüpft an die Bedingung:

$$(V) \quad p = 0.$$

Von den drei Specialfällen, für welche dieselbe erfüllbar ist ( $b = 0, a = 0, b = a = 0$ ), möge hier der erste als der wichtigste genügen. Wir wollen in der That in allen vorstehenden Formeln  $b = 0$  setzen und dabei den Incidenzwinkel  $e$  von  $0$  bis  $90^\circ$  ansteigen lassen.

Zunächst geben die Ausdrücke (2) für das Intervall zwischen den Grenzen  $n_1 \sin i = 0$  und  $n_1 \sin i = a$ :

$$(8) \quad \begin{cases} p = \sqrt{a^2 - n_1^2 \sin^2 i}, \\ q = 0, \\ v = a, \\ \chi = 0. \end{cases}$$

Dagegen zwischen den Grenzen  $n_1 \sin i = a$  und  $n_1 \sin i = n_1$ :

$$(9) \quad \begin{cases} p = v w = 0, \\ q = \sqrt{n_1^2 \sin^2 i - a^2}, \\ v = n_1 \sin i, \\ \chi = \chi_p. \end{cases}$$

Dürfen wir daher für das erste Intervall auch:

$$p = a \cos r$$

schreiben und in Rücksicht auf Gleichung (3) noch die unbestimmte Form:

(10)  $e \approx i$   
hinzufügen, so wird für das zweite Intervall nach Substitution der Ausdrücke (9) in die nämliche Gleichung:

$n_1^2 \sin i \sin e \cos \psi = v^2 = n_1^2 \sin^2 i$ ,  
woraus folgt:

$$(11) \quad \sin e = \frac{\sin i}{\cos \psi}$$

Was jetzt weiter die Schwingungsausdrücke (4) für den gebrochenen Strahl betrifft, so reduciren sich dieselben für das erste Intervall auf die eine Form:

$$(12) \quad \varrho_D = \mathfrak{D} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{a(x + y + w)}{\lambda} \right),$$

oder auch bei Einführung der neuen, in der Ebene von Strahl und Loth gelegenen Coordinate  $r$ :

$$(12_b) \quad \varrho_D = \mathfrak{D} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{a(x \cos r + r \sin r)}{\lambda} \right).$$

Dagegen liefert das zweite Intervall die Strahlcomponenten:

$$\xi_D = \mathfrak{D}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{n_1^2 \sin^2 e \cos^2 \psi - a^2}} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + r \frac{n_1 \sin e \cos \psi}{\lambda} \right) - \chi_z \right], \dots,$$

sodass folglich der Totalreflexion stets ein gebrochener, streifender Strahl entspricht mit variablem Extinctions- und variablem Refractionscoefficienten.

Hierin ist  $\lambda/n_1 \sin e \cos \psi$  der in der Richtung des Strahles gemessene Abstand zweier Punkte der Trennungsfläche, die vermöge der einfallenden und reflectirten Wellenbewegung in jedem Augenblick in gleichen Schwingungszuständen sind. Liegt insbesondere der gebrochene Strahl im Hauptschnitte selber, so ist noch  $\psi = 0$ ,  $\cos \psi = 1$  zu setzen.

Die dieser speciellen Voraussetzung entsprechenden Ausdrücke (6) und (7) endlich geben für das erste Intervall:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_p &= \pm \frac{n_1 \sqrt{a^2 - n_1^2 \sin^2 i} - a^2 \cos e}{n_1 \sqrt{a^2 - n_1^2 \sin^2 i} + a^2 \cos e} \mathfrak{E}_p = \mp \frac{a \cos e - n_1 \cos r}{a \cos e + n_1 \cos r} \mathfrak{E}_p \\ \text{tg } \chi_p &= 0. \end{aligned} \right.$$

Dieselben sind, abgesehen von dem um  $90^\circ$  differirenden Schwingungssazimuth, identisch mit den bezüglichen Ausdrücken der Theorie Neumann's.

Andererseits erhält man für das zweite Intervall:

$$(15) \quad \mathfrak{R}_p = \pm \mathfrak{E}_p, \quad \text{tg } \chi_p = \frac{2 n_1 a^3 \cos e \sqrt{n_1^2 \sin^2 e - a^2}}{n_1^2 (n_1^2 \sin^2 e - a^2) - a^4 \cos^2 e},$$

und diese wiederum werden bei Einführung des relativen Index  $n = (n_1/a)$  identisch mit den für isotrope Medien geltenden Ausdrücken Fresnel's und Cauchy's.

Da für den etwa gleichzeitig mit entstehenden ordinären Strahl unbeschadet seines verschiedenen Index ( $a_0 \neq a_1$ ) dieselben Ausdrücke anzuwenden sind, die Fresnel und Cauchy für senkrecht zur Einfallsebene schwingendes Licht und für isotrope Medien aufgestellt, und die ich bereits früher<sup>1)</sup> in ähnlicher Weise abgeleitet habe, so übersieht man auch die durch das Zusammenwirken beider Schwingungsantheile entstehende gemischte Erscheinung, die meines Wissens bisher noch von niemand experimentell behandelt ist.

Vorstehende Untersuchung hat sonach gelehrt, dass die Totalreflexion auch in anisotropen Medien ein specieller Fall der Metallreflexion ist, und dass gegenwärtig weder die eine noch die andere der früheren, physikalisch unbefriedigenden imaginären Kunstgriffe mehr bedarf. Andererseits ist für den Uebergang der gewöhnlichen Reflexion in die totale und umgekehrt die durch Cauchy's Erklärungsversuche stark getrübe Continuität der Erscheinung in ihrer vollen Ursprünglichkeit, und zwar vom streng mechanischen Standpunkte aus, wieder hergestellt.

Bonn, Herbst 1883.

Nachschrift. In einem eben veröffentlichten Aufsatze: „Theorie der Quincke'schen Beobachtungen über totale Reflexion“<sup>2)</sup> hat Hr. Voigt einen dankenswerthen Beitrag zur Theorie der Totalreflexion geliefert. Da indess die Arbeiten der unmittelbaren Vorgänger nicht citirt sind, so möchte ich mir hier die Bemerkung gestatten, dass ich die Theorie der Totalreflexion an isotropen Medien zuerst von allen ihr noch anklebenden Unsicherheiten und Unklarheiten befreit und sie sogar als einen speciellen Fall der allgemeineren Metallreflexion dieser habe subsumiren können. Ersteres ist insbesondere bereits von einem Anhänger des Neumann'schen Systemes, Hrn. Glazebrook<sup>3)</sup>, in bestimm-

1) Ketteler, Carl's Repert. 16. p. 261. 1880, Beibl. 4. p. 879. 1880.

2) Voigt, Göttinger Nachr. Febr. 1884. p. 50.

3) Glazebrook, Proc. Cambridge Phil. Soc. 3. p. 390. 1880 und 4. p. 155. 1881.

ter Form anerkannt, und hat derselbe zuerst von seinem Standpunkte aus die Fresnel'schen Ausdrücke ohne Benöthigung complexer Grössen abgeleitet.

Was also Hr. Voigt auf den vier ersten Seiten seiner Abhandlung gibt, ist daher nicht neu, ja nicht einmal vollständig, sofern die Verträglichkeit eines Schwingungsausdruckes von der Form:

$$\Re e^{\frac{2\pi}{T} + \sqrt{n_1^2 \sin^2 \epsilon - n_2^2} x} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + n_1 \sin \epsilon \frac{x}{\lambda} \right) - \chi \right]$$

mit den Differentialgleichungen der bezüglichen Medien von ihm stillschweigend als selbstverständlich vorausgesetzt wird. Auch die Art und Weise, wie gerade der Absorptionsvorgang die Erhaltung der Energie ermöglicht, kommt nirgendwo zur Sprache.

Was sodann die Quincke'schen Versuche betrifft, so habe ich eine exacte Theorie derselben der Umständlichkeit der Rechnungen wegen — sie erfordern drei, hintereinander liegende Medien — bisher noch verschoben, habe aber anderseits eine in gewissem Sinne noch schwierigere Aufgabe, die Berechnung des Durchganges des Lichtes durch eine planparallele Metallplatte, schon vor mehreren Jahren durchgeführt.<sup>1)</sup> Hätte ich hierbei nicht, wie das begreiflicherweise meistens zulässig ist, den Einfluss des an der Hinterfläche gespiegelten Lichtes auf das an der Vorderfläche reflectirte vernachlässigt, so würden meine Formeln die des Hrn. Voigt vollständig umfassen, und würden letztere durch Nullsetzung des Absorptionscoefficienten ohne weiteres daraus abzuleiten sein.

Die in Rede stehende Arbeit hat jedenfalls ihre Aufgabe mit Erfolg gelöst. Da Hrn. Voigt's Ausdrücke nur durch geringfügige Aenderungen in die des Fresnel'schen Systemes übergehen, so nehme ich natürlich das gesammte Resultat, das ja ohnehin für seinen Autor in Bezug auf Dispersion nur näherungsweise gültig ist, für jenes von mir vertretene System als streng richtig in Anspruch.

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. p. 95 u. 284. 1878.

Nunmehr dürfte wohl auch die Entwicklung der Totalreflexion der anisotropen Medien für die Anhänger der Neumann'schen Grundvorstellung ein erhöhtes Interesse gewinnen; dieselbe wird eben für die Leistungsfähigkeit des „vollständigen Kirchhoffschen Princips“ die schärfste Probe abgeben.

Bonn, im April 1884.

**VI. Duplik gegen Hrn. W. Voigt;  
von E. Ketteler.**

Hr. Voigt hat meiner Erwiderung<sup>1)</sup> eine Duplik<sup>2)</sup> folgen lassen, die ich im Folgenden in möglichster Kürze besprechen werde, ohne freilich zu erwarten, dass Hr. Voigt selbst sich dadurch „zur Aufgabe irgend eines seiner Bedenken veranlasst sehen werde.“

Indem ich zunächst bemerke, dass die folgenden Zeilen für die Beurtheilung der Reflexionstheorien Fresnel's und Neumann's einige neue Gesichtspunkte enthalten, folge ich einzeln den von ihm aufgeführten Punkten; es sind ihrer sieben.

1) Wenn Hr. Voigt bezüglich der Constitution der Materie die Anschauungen der Hrn. v. Helmholtz, Lommel sowie die meinige derart zurechtlegt, dass dieselben z. B. auf die Gase der kinetischen Theorie nicht mehr zu passen scheinen, so ist das scheinbar, und dürfte insbesondere ein Einblick in die astronomische Undulationstheorie vor derartigen Täuschungen schützen. Ich nenne die Moleküle der Chemie durchweg schwingungsfähige Atomgebilde und unterscheide an ihnen folglich Punkte, die in relativer Ruhe, und solche, die in relativer Bewegung sind.

1) Ketteler, Wied. Ann. 21. p. 178. 1884.

2) Voigt, Wied. Ann. 21. p. 534. 1884.

2) Ich habe bewiesen, dass die von Hrn. Voigt anfänglich aufgestellten, später freilich aufgegebenen allgemeinen Bewegungsgleichungen als solche falsch sind, weil sie auf einer unrichtigen Handhabung des Reactionsprinzips beruhen. Hr. Voigt erklärt diesen meinen Beweis für unrichtig, weil — Aether- und Körpertheilchen nicht ineinander verwandelbar sind. Er erklärt also damit die vielfach gehegte Ansicht, die ponderable Materie sei nicht essentiell vom Aether verschieden, für irrig. Keinenfalls aber dürfte es angehen, selbst einen mathematischen Beweis von dieser Möglichkeit abhängig zu machen.

Eigenthümlich ist übrigens die Meinung Hrn. Voigt's, dass alles, was ich zur allgemeinen Aufklärung gegen sein System vorbringe, ausschliesslich im Interesse und zum „Aufhelfen“ meiner eigenen Theorie dienen müsse.

3) Wenn ich speciell infolge der Anregungen, die ich Hrn. Voigt verdanke, in die glückliche Lage gekommen bin, meine Differentialgleichungen vervollständigen zu können, und dadurch jetzt näher auf den eigentlichen Grund der Erscheinungen einzugehen vermag, so würde ich für diese Anregungen doppelt dankbar sein, wenn sie nicht mit einer so unerfreulichen Polemik verbunden wären. Diese meine Erklärung besagt freilich nicht, dass meine jetzige Auffassung mit meiner früheren in directem Widerspruch steht, sondern nur, dass dieselbe durch die eingeführten Zusatzglieder mehr leistet als die frühere. In der That werden in der ersten der Differentialgleichungen (13)<sup>1)</sup>, solange man dieselbe auf ganz kurze Wellen bezieht, die beiden hinzugefügten Glieder der rechten Seite überflüssig, und geht dieselbe dadurch im wesentlichen in die ältere Form zurück.

4) Hiernach komme ich zur Reflexionstheorie und werde bei derselben etwas ausführlicher verfahren.

a) In Betreff der Fresnel'schen Formeln macht Hrn. Voigt neben der aus dem Incompressibilitätsprincip ableitbaren Grenzbedingung der Normalcomponenten:

1) Ketteler, Wied. Ann. 21. p. 205. 1884. Die dort hinzugefügte Anmerkung stellt sich auch für die Optik als wichtiger heraus, als damals angenommen ist.



die auf dieselben Componenten bezügliche, aber mit jenem Princip nicht direkt in Verbindung stehenden Form:

$$\sum \zeta_1 n_1 = \zeta_2 n_2$$

mehrfache Schwierigkeit. Die erste dieser Gleichungen ergibt sich für  $\eta = 0$  ohne weiteres aus der Fresnel-Neumann'schen Continuitätsbedingung:  $\sum \xi_1 = \xi_2$ , die ja in Rücksicht auf das Huygens'sche Princip auch  $\sum (d\xi_1/dx = d\xi_2/dx)$  geschrieben werden kann, und die dann unter Benutzung der Incompressibilitätsgleichung übergeht in:

$$(1) \quad \sum \frac{d\zeta_1}{dz} = \frac{d\zeta_2}{dz}.$$

b) Was dagegen die zweite der obigen Gleichungen betrifft, so hat Hr. Voigt die mehr negative als positive Form  $\sum \zeta_1 \geq \zeta_2$  derselben, die ich einmal lediglich im Gegensatz zur Neumann'schen Forderung:

$$\sum \zeta_1 = \zeta_2$$

gebraucht habe, aus ganz befremdlichen Gründen mit der Annahme der gleichen Dichte und der Incompressibilität des Aethers unvereinbar erklärt. Ich habe darauf nur kurz, aber wohl verständlich, geantwortet, dass ich nicht begreife, wie man derartiges aus dem Incompressibilitätsprincip folgern könne, und jetzt nun muss ich geradezu darüber staunen, dass ich „dieses Princip nicht überall anerkennen soll (ob mit Nebengedanken über seine strenge Gültigkeit oder nicht, sei gleichgültig), sondern nur wo es mir passe“ (!). Der dann folgende Beweis der erwähnten Neumann'schen Grenzgleichung als Consequenz des Incompressibilitätsprincips ist aber falsch, sofern von den drei Componenten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  der bekannten Gleichung:

$$(2) \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0,$$

$\xi$  und  $\eta$  ausser Acht gelassen werden, während doch bei allen vorkommenden Erscheinungen mindestens etwa  $\xi$  und  $\zeta$  zusammengehören. Wenn allerdings für den Grenzfall der

streifenden Incidenz und bei Schwingungen parallel der  $XZ$ -Ebene als der Einfallsebene  $\xi = 0$  zu werden scheint, so bleibt dennoch die obige Gleichung erfüllt, da dann bei endlichem  $\zeta$  der Factor  $\cos r$  gleich Null wird.

Wie sehr und unbedingt ich meinerseits das in der Reflexionstheorie der absorbirenden Medien von mir zu Ehren gebrachte Incompressibilitätsprincip anerkenne, geht doch auch wohl daraus hervor, dass ich der obigen Gleichung für den Aether eine ganz gleiche für die Körpertheilchen hinzugefügt habe.<sup>1)</sup>

c) Es soll jetzt bewiesen werden, dass die neueste Form der von Hrn. Voigt aufgestellten Reflexionstheorie, die sich als eine die Dispersion berücksichtigende Verbesserung der Neumann'schen Theorie ankündigt, in Wirklichkeit ein Aufgeben ihrer Folgerichtigkeit ist. Des Leser möge dabei entscheiden, inwieweit die mir p. 539 von Hrn. Voigt vorgeworfenen „Wandelungen“ sich auch in seinen eigenen Arbeiten nachweisen lassen. Bevor ich indess den angedeuteten Versuch mache, habe ich einen Hilfssatz zu besprechen.

Zu dem Ende erinnere ich an die vier folgenden Grenzgleichungen, die, wie ich<sup>2)</sup> früher erwiesen habe, die specielle Theorie Fresnel's und Neumann's in sich einschliessen. Sie lauten bei beliebiger Lage der  $X$ - und  $Y$ -Axe:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{d\xi_2}{dt}, \quad \sum \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{d\eta_2}{dt} \\ B_1 \sum \left( \frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\xi_1}{dx} \right) = B_2 \left( \frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\xi_2}{dx} \right) \\ B_2 \sum \left( \frac{d\eta_1}{dz} - \frac{d\eta_1}{dy} \right) = B_2 \left( \frac{d\eta_2}{dz} - \frac{d\eta_2}{dy} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{array}$$

Ich habe sie bei jenem Anlass als vier zusammengehörige, sich gegenseitig ergänzende Beziehungen in aller Strenge aus einer einzigen Formel abgeleitet, die einer Formel Hrn. Kirch-

1) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 647. 1883. Ferner: 21. p. 207. 1884.

2) Ketteler, l. c. 21. p. 633. 1883.

hoff's nachgebildet ist, welche seitdem von Hrn. Voigt kurz das „Kirchhoff'sche Princip“ genannt wird.

Auch Hr. Voigt erkennt diese Gleichungen als richtig an und braucht dieselben, wenngleich in viel verwickelterer, äusserer Gestalt, die freilich sich mehr an Kirchhoff's Arbeit anschliesst, als an die meinige. Legen wir uns jetzt die Frage vor: Welches ist die mit den vier vorstehenden Gleichungen verträgliche Form der Grenzbedingung der Normalcomponenten?

Obwohl ich schon mehrfach darauf hingewiesen habe, dass die anscheinend von Cauchy herrührende Verquickung der Grenzgleichungen der Elasticität mit dem Huygens'schen Princip durch nichts begründet sei, und dass somit das eine dem anderen coordinirt und nicht subordinirt sei, so bezieht nichtsdestoweniger Hr. Voigt in herkömmlicher Weise seine Uebergangsbedingungen nicht auf den (allerdings beliebigen) Coordinatenanfangspunkt, sondern auf die ganze Ebene  $x = 0$ . Hat das zwar für durchsichtige Medien keine directen üblen Folgen, so trübt es doch die logische Consequenz. Es sei also nochmals constatirt, dass die obigen Gleichungen zunächst nur gelten sollen für den Punkt  $x=y=z=0$ .

Supponiren wir jetzt der Kürze halber den Fall, dass es sich um Parallelschwingungen zur Einfallsebene handle, sodass die  $\eta = 0$  sind und sich einfach schreiben lässt:

$$\Sigma \xi_1 = \xi_2, \quad B_1 \Sigma D_1 = B_2 D_2,$$

unter  $D$  die Drehcomponente in der Einfallsebene verstanden.

Der Umstand nun, dass der Coordinatenanfangspunkt beliebig ist, und dass folglich die vorstehende Gleichheit der Ausschläge und Drehcomponenten für alle Punkte der  $X$ -Axe gleichzeitig zutrifft, lässt sich für die oben aufgeworfene Frage analytisch verwerthen. Betrachten wir einen vom Coordinatenanfang um  $\Delta x$  abstehenden Punkt, so werden offenbar für ihn die Grenzbedingungen gelten:

$$\Sigma \left( \xi_1 + \frac{d\xi_1}{dx} \Delta x \right) = \xi_2 + \frac{d\xi_2}{dx} \Delta x$$

$$B_1 \Sigma \left( D_1 + \frac{dD_1}{dx} \Delta x \right) = B_2 \left( D_2 + \frac{dD_2}{dx} \Delta x \right).$$

Wir haben folglich die vier verträglichen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sum \xi_1 &= \xi_2, & \sum \frac{d\xi_1}{dx} &= \frac{d\xi_2}{dx} \\ B_1 \sum \left( \frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right) &= B_2 \left( \frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right) \\ B_1 \sum \frac{d \left( \frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right)}{dx} &= B_2 \frac{d \left( \frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right)}{dx} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Der zweiten derselben ist schon oben gedacht worden. Was jetzt die vierte betrifft, so soll dazu der beiderseits identisch gleiche Ausdruck:

$$-B_1 \sum \frac{d \left( \frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\zeta_1}{dz} \right)}{dz} = -B_2 \frac{d \left( \frac{d\xi_2}{dx} + \frac{d\zeta_2}{dz} \right)}{dz}$$

als Ausdruck des Incompressibilitätsprincips addirt werden. Es kommt dann:

$$(4) \quad B_1 \sum \left( \frac{d^2 \zeta_1}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta_1}{dy^2} + \frac{d^2 \zeta_1}{dz^2} \right) = B_2 \left( \frac{d^2 \zeta_2}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta_2}{dy^2} + \frac{d^2 \zeta_2}{dz^2} \right),$$

sofern wir nämlich die Glieder  $d^2 \zeta / dy^2$ , die im allgemeineren Falle eine eben solche Verschiebung des Einfallspunktes in der Richtung der  $Y$ -Axe zuwege bringt, gleich hinzufügen. Diese so erwiesene Gleichung habe ich schon in einem älteren Aufsatz<sup>1)</sup>, ohne sie freilich damals auch theoretisch zu begründen, empirisch abgeleitet; sie mag jetzt den Gleichungen (3) als eine Art Ergänzung hinzugefügt werden.

Setzt man in diesen Gleichungen:

$$B_1 = B_2,$$

so ergibt die Substitution der Schwingungsausdrücke die Fresnel'schen Formeln. Setzt man dagegen:

$$B_1 : B_2 = \frac{1}{n_1} : \frac{1}{n_2},$$

so erhält man die Formeln Neumann's.

Was insbesondere die letzte Gleichung (4) betrifft, so führt dieselbe unter der ersten Annahme zur Forderung:

$$\sum \zeta_1 n_1 = \zeta_2 n_2,$$

unter letzterer Annahme dagegen zu:

$$\sum \zeta_1 = \zeta_2.$$

1) Ketteler, Wied. Ann. 1. p. 220. 1877.

Handelt es sich insbesondere auf dem Standpunkte Fresnel's um genäherte streifende Incidenz, sodass für  $\eta = \xi = 0$  Gleichung (4) geschrieben werden kann:

$$\sum \frac{d^2 \zeta_1}{dx^2} = \frac{d^2 \zeta_2}{dx^2},$$

so besagt dieselbe, dass die Krümmung der aneinander anstossenden Grenzschichten beider Medien in jedem Augenblick gleich ist. Dasselbe gilt für die Incidenzen der Totalreflexion.

d) Hat sonach die vorstehende Entwicklung dargethan, dass die strenge Neumann'sche Theorie für den Hauptfall  $\eta = 0$  zu den Uebergangsbedingungen führt:

$$(5) \quad \Sigma \zeta_1 = \zeta_2, \quad \frac{1}{n_1^2} \Sigma D_1 = \frac{1}{n_2^2} D_2,$$

so stellen wir diesen nunmehr die von Voigt gewollten gegenüber. Letztere haben zur Zeit die Form<sup>1)</sup>:

$$(6) \quad \begin{cases} M_1 \Sigma \zeta_1 = M_2 \zeta_2, & B_1 \Sigma D_1 = B_2 D_2 \\ \frac{1}{n_1^2} = \frac{B_1}{M_1}, & \frac{1}{n_2^2} = \frac{B_2}{M_2}. \end{cases}$$

Dieselben sind folglich nur dann mit den strengen Neumann'schen Gleichungen und folglich auch nur dann unter einander verträglich, wenn gesetzt wird:  $M_1 = M_2$ . Nun hat Hr. Voigt aus seiner Dispersionstheorie die Ausdrücke abgeleitet:

$$B_1 = e_1 + a_1 - \frac{a_1'}{\tau^2}, \quad M_1 = m_1 + r_1 - n_1 \tau^2,$$

$$B_2 = e_2 + a_2 - \frac{a_2'}{\tau^2}, \quad M_2 = m_2 + r_2 - n_2 \tau^2,$$

worin  $\tau$  der Schwingungsdauer proportional ist. Und wenn er auf Grund der Erfahrung die vereinfachende Annahme macht, dass  $M_1 = M_2$ , so ist damit seine Reflexionstheorie und insbesondere seine Grenzbedingung:

$$\Sigma M_1 \zeta_1 = M_2 \zeta_2$$

zu einer empirischen und ganz und gar willkürlichen geworden, die, wie Hr. Voigt mir p. 536 vorwirft, „nur aufgestellt

1) Voigt, Göttinger Nachr. Febr. 1884. p. 50.

ist, um die von ihm gewünschten Ausdrücke zu geben.“ Dann darf man aber auch (p. 540) „derartige Gleichungen nicht als eine strenge Theorie hinstellen, am wenigsten wenn sie sich mit erprobten allgemeineren Gesetzen in Widerspruch befinden.“

Der Voigt'sche Uebergang von der strengen Neumann'schen Gleichung  $\Sigma \zeta_1 = \zeta_2$  zur vorstehenden hat sich mittelst der Durchgangsform:

$$m_1 \Sigma \zeta_2 = m_2 \zeta_2$$

vollzogen, worin  $m_1$ ,  $m_2$  die bezüglichen Aetherdichtigkeiten bedeuten, eine natürlich ebenso falsche Gleichung, die seiner Zeit<sup>1)</sup> durch den Satz motivirt wurde: „Bekanntlich nimmt man an, dass die Normalcomponenten sich in unmerklicher Entfernung von der Grenze umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten.“ Hr. Voigt scheint zwar diese Widersprüche gelegentlich selbst gefühlt zu haben, in ihren tieferen Grund aber nicht eingegangen zu sein.

5) Nach diesem Zusammenbruch der „Pfeiler seiner Theorie“ verlieren die weiteren Monita stark an Interesse. Da Hr. Voigt in seiner ersten Kritik sechs Continuitätsgleichungen, nämlich solche für die Aethertheilchen und solche für die Körpertheilchen, getrennt aufgestellt, und ich die letzteren aus dem Grunde verworfen hatte, weil sie im Falle des Lichtüberganges vom freien Aether aus ein Mitschwingen der Körpertheilchen unmöglich machten, so schliesst Hr. Voigt diese missliche Consequenz jetzt mit den Worten aus: „Bekanntlich werden dann die Verrückungscomponenten der Körpertheilchen unbestimmt.“

6) Was sodann die Besprechung des Kirchhoff'schen Principis und seinen Zusammenhang mit den Gleichungen der potentiellen und kinetischen Energie betrifft, so hat er von meiner Erwiderung nicht hinlänglich Notiz genommen. Wenn ich mir vorstelle, dass ein brechender Körper abwechselnd aus unendlich dünnen Schichten freien Aethers und aus solchen, die zugleich ponderable Materie enthalten,

1) Voigt, Wied. Ann. 19. p. 900. 1889.

bestehe, so will Hr. Voigt „kein Wort über diese Annahme verlieren.“ Er vergisst dabei leider nur, dass der Flächenraum dieser Schichten auch nur unendlich klein zu sein braucht, und dass die rationelle Reflexionstheorie (abgesehen von dem von ihr vorausgesetzten Huygens'schen Princip) mit unendlich engen „Strahlcyindern“ auskommt. Im übrigen liegen diese Vorstellungen so sehr in der neueren Dispersionstheorie begründet, dass auch die Herren Sellmeier, v. Helmholtz und Lommel sie mit mir theilen werden.

Was schliesslich das „Merkwürdige“ betrifft, dass ich eine Formulirung des so oft von mir citirten Princip der Energie nirgends gegeben haben soll, so will ich zunächst die Gleichung:

$$(7) \quad B_1 \sin e \cos e (A_2 \xi_E \cdot d\xi_E - A_2 \xi_R \cdot d\xi_R) = B_2 \sin r \cos r A_2 \xi_D \cdot d\xi_D$$

als Ausdruck für das Princip der Erhaltung der Aetherarbeit oder genauer der potentiellen Energie desselben nochmals hinschreiben. Wenn Hr. Voigt dann in dieselbe den aus der folgenden Beziehung<sup>1)</sup>:

$$(8) \quad m \frac{d^2 \xi}{dt^2} d\xi + m' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} d\xi' = e A_2 \xi d\xi + \beta m' \xi' d\xi - \alpha \xi' d\xi',$$

sich ergebenden Werth von  $e A_2 \xi d\xi$  für beide Medien einführt, so gewinnt er damit diejenige Gleichung, die für  $\xi' = 0$  mit den Gleichungen der lebendigen Kräfte von Fresnel und Neumann (dieselben auf die kinetischen Energien bezogen gedacht) übereinstimmt.

7) Die von Hrn. Kirchhoff gegebene Entwickelung, die seit meiner Heranziehung derselben von Voigt adoptirt ist, befindet sich in einer Arbeit über die Krystallreflexion und bezieht sich sonach ursprünglich nur auf diese. Da nun die Differenzen zwischen den beiden (früher gleich berechtigten) Reflexionstheorien für anisotrope Medien weit schroffer hervortreten als für isotrope, so muss bei ersteren jede Verwerthung einer bestimmten Idee sofort je nach der Grundanschauung zu gänzlich verschiedenen Gestaltungen führen.

1) Ketteler, Wied. Ann. 21. p. 203. 1884.



Es ist also willkürlich, meine Grenzgleichungen (3) darum anzugreifen, weil sie im Gegensatz zu den Neumann'schen für anisotrope und isotrope Medien identisch sind.

Nach Erledigung dieser sieben Punkte will ich mich bei dem mir schliesslich gemachten Vorwurfe der „Wandelungen“ in meiner Theorie (p. 539) nicht lange aufhalten. So lange „Wandelung“ und „stetige Verbesserung“ sich deckende Begriffe sind, bleibt jene eben ein Attribut des menschlichen Fortschreitens, nur muss sie sich natürlich hüten, in Ueberstürzung umzuschlagen.

Hiermit wird es hoffentlich der Polemik genug sein.

Bonn, im März 1884.

**VII. Ueber die Verzögerung, welche beim Durchgange des Lichtes durch eine Platte eintritt, und über einige darauf gegründete Apparate;  
von W. Voigt.**

Es sei eine Schicht von der Dicke  $l$  eines beliebigen Mediums (1), welchem eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\omega_1$  entspricht, gegeben; aus einem angrenzenden Medium (0) mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\omega$  falle eine ebene Lichtwelle unter einem Winkel gegen das Einfallslot, dessen Sinus und Cosinus  $\alpha$  und  $\gamma$  ist, und pflanze sich in der Schicht (1) in einer Richtung fort, die durch  $\alpha_1$  und  $\gamma_1$  definiert ist. Dann setzt man den Unterschied der Phase, den die Welle nach dem Durchgang durch die Schicht an einer beliebigen Stelle gegenüber einer frei fortgepflanzten Welle besitzt, gewöhnlich<sup>1)</sup>:

$$\Delta = \frac{l}{\tau \gamma_1} \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{\gamma \gamma_1 + \alpha \alpha_1}{\omega} \right),$$

worin  $2\pi\tau = T$  die Schwingungsdauer ist. Speciell bei senkrechtem Einfall wird dies:

1) Vgl. z. B. Quincke, Pogg. Ann. 132. p. 205. 1867.

$$\Delta_0 = \frac{l}{\tau} \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega} \right)$$

oder  $2\pi\tau\omega = \lambda$ , d. i. gleich der Wellenlänge, und  $\omega/\omega_1 = n$ , d. i. gleich dem Brechungscoëfficienten gesetzt:

$$\Delta_0 = \frac{2\pi l}{\lambda} (n - 1).$$

Diese Formeln sind aber unrichtig, weil die Lichtwelle nicht einfach durch die Platte hindurchgeht, sondern an den Grenzen reflectirt wird, die austretende Welle also aus Theilen, welche verschieden oft die Platte passirt haben, zusammengesetzt ist. Nur bei schiefem Einfall können diese inneren Reflexionen ganz wirkungslos werden, wenn die Fläche der Platte klein gegen ihre Dicke ist, bei normalem Einfall kann ihre Wirkung durch gewisse Umstände zwar gemindert, im Allgemeinen aber nicht aufgehoben werden.

Da diese mindestens ungenauen Formeln in viele Handbücher<sup>1)</sup> ohne eine Bemerkung über die Grenze ihrer Gültigkeit übergegangen sind, so dürfte es angemessen sein, einmal auf diejenigen hinzuweisen, welche die strenge Theorie — die jene inneren Reflexionen berücksichtigt — abzuleiten gestattet.<sup>2)</sup>

Ich nehme die Normale der Platte zur Z-Axe, ihre erste Fläche zur Ebene  $z = 0$ , die zweite zur Ebene  $z = l$ , die XZ- zur Einfallsebene und denke die beiderseits die Platte begrenzenden Medien von verschiedener Natur, definirt durch  $\alpha\gamma\omega$  und  $\alpha'\gamma'\omega'$ .

Setze ich noch die Verschiebungscomponente normal zur Grenze

in der einfallenden Welle:

$$v_e = E_s \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right),$$

in der an der ersten Fläche reflectirten:

$$v_r = R_s' \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) + R_s'' \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right),$$

1) Vgl. z. B. Wüllner, Physik, 2. p. 388 und 422. 1875; Mousson, Physik, 2. p. 493. 1872; V. v. Lang, Physik. p. 252. 1873; auch Billet, Optik, p. 66. 1858; Radicke, Optik, 1. p. 409. 1839; Verdet-Erner, Optik, 1. p. 40. 1881.

2) Vgl. übrigens hierzu Zech, Pogg. Ann. 109. p. 60. 1860.

in der ebenda gebrochenen:

$$v_1 = \Delta_s' \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + \Delta_s'' \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right),$$

in der an der zweiten Fläche reflectirten:

$$v_2 = P_s' \sin \left( t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + P_s'' \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right),$$

in der ebenda gebrochenen:

$$v_d = D_s' \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega} \right) + D_s'' \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega} \right),$$

so werden unter Benutzung der Neumann'schen Grenzgleichungen, die ich früher unter gewissen Voraussetzungen mit dem Princip der Energie verträglich erwiesen habe<sup>1)</sup>, die Bedingungen bestehen:

für  $z = 0$

$$E_s + R_s' = \Delta_s' + P_s'$$

$$R_s'' = \Delta_s'' + P_s''$$

$$\frac{\alpha \gamma}{\alpha_1 \gamma_1} (E_s - R_s') = \Delta_s' - P_s'$$

$$- \frac{\alpha \gamma}{\alpha_1 \gamma_1} R_s'' = \Delta_s'' - P_s'',$$

$$\text{für } z = l \quad D_s' = (\Delta_s' + P_s') c + (\Delta_s'' - P_s'') s \quad 1.$$

$$D_s'' = -(\Delta_s' - P_s') s + (\Delta_s'' + P_s'') c$$

$$\frac{\alpha' \gamma'}{\alpha_1 \gamma_1} D_s' = (\Delta_s' - P_s') c + (\Delta_s'' + P_s'') s$$

$$\frac{\alpha' \gamma'}{\alpha_1 \gamma_1} D_s'' = -(\Delta_s' + P_s') s + (\Delta_s'' + P_s'') c,$$

$$\text{worin kurz} \quad s = \sin \frac{l \gamma_1}{\omega_1 \tau} \quad c = \cos \frac{l \gamma_1}{\omega_1 \tau}.$$

Unter Benutzung der Abkürzungen:

$$\sigma = \alpha \gamma + \alpha_1 \gamma_1, \quad \delta = \alpha \gamma - \alpha_1 \gamma_1,$$

$$\sigma' = \alpha' \gamma' + \alpha_1 \gamma_1, \quad \delta' = \alpha' \gamma' - \alpha_1 \gamma_1,$$

erhält man hieraus:

$$\Pi, D_s' = E_s c (\sigma^2 - \delta^2) (\sigma \sigma' - \delta \delta')$$

$$\Pi, D_s'' = -E_s s (\sigma^2 - \delta^2) (\sigma \sigma' + \delta \delta')$$

$$\Pi, R_s' = E_s [(\sigma'^2 + \delta'^2) \sigma \delta - \sigma' \delta' (\sigma^2 + \delta^2) (c^2 - s^2)] \quad 2.$$

$$\Pi, R_s'' = E_s \sigma' \delta' (\sigma^2 - \delta^2) 2 s c$$

$$\Pi, = (\sigma \sigma' - \delta \delta')^2 c^2 + (\sigma \sigma' + \delta \delta')^2 s^2.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 900. 1883.

Die Intensitäten werden gemessen durch:

$$R_s^2 = R_s'^2 + R_s''^2 = \frac{E_s^2}{\Pi_s} ((\sigma\delta' - \sigma'\delta)^2 + 4\sigma\sigma'\delta\delta's^2)$$

$$D_s^2 = D_s'^2 + D_s''^2 = \frac{E_s^2}{\Pi_s} (\sigma^2 - \delta^2)s^2,$$

worin man auch schreiben kann:

$$\Pi_s = (\sigma\sigma' - \delta\delta')^2 + 4\sigma\sigma'\delta\delta's^2.$$

Die Phasendifferenz  $\Delta_s$  zwischen zwei an den beiden Grenzflächen der Platte, und zwar an derselben Normalen gelegenen Stellen ist (im Sinne einer Verzögerung gerechnet) gegeben durch:

$$\operatorname{tg} \Delta_s = - \frac{D_s''}{D_s'} = \frac{s}{c} \cdot \frac{\sigma\sigma' + \delta\delta'}{\sigma\sigma' - \delta\delta'}$$

d. h.:

$$= \frac{\alpha\gamma\alpha'\gamma' + \alpha_1^2\gamma_1^2}{(\alpha\gamma + \alpha'\gamma')\alpha_1\gamma_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 l}{\tau\omega_1}.$$

3.

Ist das erste und dritte Medium identisch, so gibt sich:

$$\operatorname{tg} \Delta_s = \frac{\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1^2}{2\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 l}{\tau\omega_1}.$$

3a.

Für senkrechten Einfall ist das letztere unter Einführung des Brechungscoefficienten  $n$ :

$$\operatorname{tg} \Delta_s = \frac{n^2 + 1}{2n} \cdot \operatorname{tg} \frac{l}{\tau\omega_1}.$$

3b.

Ebenso ist die Componente parallel der Einfallsebene zu behandeln.

Setzt man die analogen Grössen wie vorstehend:

$$u_s = r_s\gamma, \quad u_r = r_r\gamma, \quad u_1 = r_1\gamma_1, \quad u_2 = r_2\gamma_2, \quad u_d = r_d\gamma' \\ w_s = -r_s\alpha, \quad w_r = r_r\alpha, \quad w_1 = -r_1\alpha_1, \quad w_2 = r_2\alpha_2, \quad w_d = -r_d\alpha'$$

$$r_s = E_p \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right)$$

$$r_r = R_p' \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) + R_p'' \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right)$$

$$r_1 = \Delta_p' \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + \Delta_p'' \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right)$$

$$r_2 = P_p' \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + P_p'' \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right)$$

$$r_d = D_p' \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega'} \right) + D_p'' \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega'} \right),$$

so werden die Grenzbedingungen:

für  $z = 0$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} (E_p + R_p') = \Delta_p' + P_p'$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} R_p'' = \Delta_p'' + P_p''$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} (E_p - R_p') = \Delta_p' - P_p'$$

$$-\frac{\alpha}{\alpha_1} R_p'' = \Delta_p'' - P_p'',$$

für  $z = l$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} D_p' = (\Delta_p' + P_p') c + (\Delta_p'' - P_p'') s \quad 4.$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} D_p'' = -(\Delta_p' - P_p') s + (\Delta_p'' + P_p'') c$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} D_p' = (\Delta_p' - P_p') c + (\Delta_p'' + P_p'') s$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} D_p'' = -(\Delta_p' + P_p') s + (\Delta_p'' - P_p'') c.$$

Daraus folgt unter Benutzung der Abkürzungen:

$$\lambda = \alpha \gamma_1 + \alpha_1 \gamma, \quad \kappa = \alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma,$$

$$\lambda' = \alpha' \gamma_1 + \alpha_1' \gamma', \quad \kappa' = \alpha' \gamma_1 - \alpha_1' \gamma';$$

$$\Pi_p D_p' = E_p c (\lambda^2 - \kappa^2) (\lambda \lambda' - \kappa \kappa')$$

$$\Pi_p D_p'' = -E_p s (\lambda^2 - \kappa^2) (\lambda \lambda' + \kappa \kappa')$$

$$\Pi_p R_p' = E_p [\lambda \kappa (\lambda'^2 + \kappa'^2) - \lambda' \kappa' (\lambda^2 + \kappa^2) (c^2 - s^2)] \quad 5.$$

$$\Pi_p R_p'' = E_p \lambda' \kappa' (\lambda^2 - \kappa^2) 2 s c$$

$$\Pi_p = (\lambda \lambda' - \kappa \kappa')^2 c^2 + (\lambda \lambda' + \kappa \kappa') s^2.$$

Hieraus:

$$R_p^2 = R_p'^2 + R_p''^2 = \frac{E_p^2}{\Pi_p} [(\lambda \kappa' - \kappa \lambda')^2 + 4 s^2 \lambda \lambda' \kappa \kappa']$$

$$D_p^2 = D_p'^2 + D_p''^2 = \frac{E_p^2}{\Pi_p} (\lambda^2 - \kappa^2)^2,$$

worin auch:  $\Pi_p = (\lambda \kappa' + \kappa \lambda')^2 + 4 s^2 \lambda \lambda' \kappa \kappa'.$

Ferner:  $\operatorname{tg} \Delta_p = -\frac{D_p''}{D_p'} = \frac{s}{c} \cdot \frac{\lambda \lambda' + \kappa \kappa'}{\lambda \lambda' - \kappa \kappa'} \quad 6.$

d. h.:  $= \frac{\alpha \alpha' \gamma_1^2 + \gamma \gamma' \alpha_1^2}{(\alpha \gamma' + \gamma \alpha') \alpha_1 \gamma_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 l}{\tau \omega_1}.$

Ist das erste und dritte Medium identisch, so wird:

$$\operatorname{tg} \Delta_p = \frac{\alpha^2 \gamma_1^2 + \gamma^2 \alpha_1^2}{2 \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 l}{\tau \omega_1} \quad | \quad 6.$$

Für senkrechten Einfall resultiren dieselben Formeln wie für  $\operatorname{tg} \Delta_s$ .

Die Grössen  $\Delta_s$  und  $\Delta_p$  bezogen sich auf zwei Punkte, welche auf derselben Normalen zur Platte in den beiden Grenzen liegen, oder zwei ebene Wellen im äusseren Medium, welche um  $l\gamma$  voneinander entfernt sind. Wäre die Platte nicht vorhanden, so würde längs dieses Weges eine Verzögerung um  $\Delta_0 = l\gamma/\tau\omega$  eingetreten sein. Der Unterschied der Phase für die durch die Platte und die frei fortgepflanzte Welle ist also für Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt:

$$\Delta = \Delta_s - \Delta_0 = \arctg \left( \frac{\alpha^2 \gamma^2 + \alpha_1^2 \gamma_1^2}{2 \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1} \operatorname{tg} \frac{l\gamma_1}{\tau \omega_1} \right) - \frac{l\gamma}{\tau \omega} \quad | \quad 7.$$

für Licht parallel der Einfallsebene polarisirt:

$$\Delta = \Delta_p - \Delta_0 = \arctg \left( \frac{\alpha^2 \gamma_1^2 + \alpha_1^2 \gamma^2}{2 \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1} \operatorname{tg} \frac{l\gamma_1}{\tau \omega_1} \right) - \frac{l\gamma}{\tau \omega} \quad | \quad 8.$$

Dies sind aber durchaus andere Werthe, als die durch die gewöhnliche, angenäherte Theorie gegebenen, welche an den Eingang dieser Mittheilung gestellt sind.

Zur Beurtheilung des Unterschiedes will ich die Werthe von  $\Delta$  für senkrechten Einfall nach der alten und neuen Formel berechnet, d. h.  $(\Delta)_a$  und  $(\Delta)_n$ , einander gegenüberstellen, und zwar für  $n = 1,5$  und für Werthe  $l/\tau\omega_1$ , die um  $\pi/20$  d. i.  $9^\circ$  fortschreiten. Man findet aus:

$$(\Delta)_a = \frac{l}{\tau} \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega} \right) \quad \text{und:}$$

$$(\Delta)_n = \arctg \left( \frac{n^2 + 1}{2n} \operatorname{tg} \frac{l}{\tau \omega_1} \right) - \frac{l}{\tau \omega} \quad | \quad 9.$$

in Theilen von  $\pi$  für:

$l/\tau\omega = 0$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$(\Delta)_a = 0$	0,0167	0,0333	0,0500	0,0667	0,0833
$(\Delta)_n = 0$	0,0208	0,0410	0,0605	0,0789	0,0960
Diff. = 0	0,0041	0,0077	0,0105	0,0122	0,0127
0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
0,1000	0,1167	0,1333	0,1500	0,1667	
0,1118	0,1267	0,1406	0,1538	0,1667	
0,0118	0,0100	0,0073	0,0038	0.	

In den folgenden Intervallen kehren dieselben Werthe mit abwechselnden Vorzeichen wieder.

Die Differenz ist also verschwindend, wenn  $l/\tau\omega_1$  ein ganzes Vielfaches von  $\pi/2$  ist, und erreicht den grössten Werth in der Nähe von  $(2h+1)\pi/4$ . Man erkennt, dass die Abweichungen recht bedeutend sind und namentlich wo es sich um die recht genaue Bestimmung sehr kleiner Verzögerungen handelt, von Einfluss werden können.

Ist  $(n^2+1)/2n$  wenig von Eins verschieden, also  $(n-1)^2/2n$  ein kleiner Bruch, so kann man bis auf zweite Ordnung exclusive (9) schreiben:

$$(\Delta)_n = \frac{2\pi l}{\lambda} (n-1) + \frac{(n-1)^2}{4n} \sin \frac{2l}{\tau\omega_1}, \quad | \quad 9_a.$$

wo nun das zweite Glied die Correction bezeichnet, welche durch die strengere Theorie zur alten Formel hinzukommt.

Wenn die Beobachtung der Verzögerung in einem sehr dünnen Blättchen zur Bestimmung des Brechungscoefficienten benutzt werden soll, so wird meistens die Ungenauigkeit der Ablesungsmethode ihre Berücksichtigung unnöthig machen. Werden zwei nahe gleich dicke Platten von nahe gleichem Brechungscoefficienten zu demselben Zwecke angewandt, so kommt noch ein Anderes hinzu, um sie auch für die feinsten Beobachtungsmittel ausser Betracht kommen zu lassen.

Selbst das am meisten homogene Licht, welches wir herstellen können, enthält ein Gemisch verschiedener Farben; in praxi wird also eine Verzögerung beobachtet, welche das Mittel der den einzelnen Farben entsprechenden ist. Ueberschreitet die Dicke  $l$  eine bestimmte Grösse (dieselbe, bei welcher die Platte im benutzten „homogenen“ Licht aufhört die Newton'schen Interferenzen zu zeigen, also für Glas und Natriumlicht ca. 1 cm) so wird das letzte Glied deshalb ohne Wirkung sein und die ältere Formel gültig bleiben.

Der Jamin'sche Compensator<sup>1)</sup>, welcher dazu dienen soll, einem Paar Lichtwellen einen gewünschten Gangunterschied zu geben, besteht bekanntlich aus zwei identischen Glasplatten, die nebeneinander unter einem sehr kleinen

1) Jamin, Ann. de chim et de phys. (3) 52. p. 166. 1858.



Winkel geneigt auf der Axe eines Theilkreises so befestigt sind, dass ihre Schnittlinien dieser Axe parallel sind. Die eine Welle lässt man durch die eine, die andere, der ersten parallel, durch die andere Platte gehen, beide unter äusserst kleinem Einfallswinkel.

Beziehen sich die Grössen  $\alpha' \gamma' \alpha_1' \gamma_1'$  auf die eine,  $\alpha'' \gamma'' \alpha_1'' \gamma_1''$  auf die andere Platte, so ist nach dem obigen die gegenseitige Verzögerung der beiden Wellen gegeben durch:

$$(\Delta)_n = \arctg \left( \frac{n^2 + 1}{2n} \operatorname{tg} \frac{l \gamma_1'}{r \omega_1} \right) - \arctg \left( \frac{n^2 + 1}{2n} \operatorname{tg} \frac{l \gamma_1''}{r \omega_1} \right) - \frac{l}{r \omega} (\gamma' - \gamma''), \quad 10.$$

vorausgesetzt, dass die Einfallswinkel hinreichend klein sind, um in dem Factor der  $\operatorname{tg}$  die  $\gamma' \gamma'' \gamma_1' \gamma_1''$  gleich Eins zu setzen; im anderen Falle würden die Componenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene verschiedene  $\Delta$  ergeben, d. h. bei Anwendung von natürlichem Licht unklare Bilder auftreten. Nimmt man noch  $(n-1)^2/2n$  neben Eins klein an, so kann man schreiben (bis zweite Ordnung exclusive):

$$(\Delta)_n = \frac{l}{r} \left[ \frac{1}{\omega_1} (\gamma_1' - \gamma_1'') - \frac{1}{\omega} (\gamma' - \gamma'') \right] + \frac{(n-1)^2}{2n} \cos \frac{l(\gamma_1' + \gamma_1'')}{r \omega_1} \sin \frac{l(\gamma_1' - \gamma_1'')}{r \omega_1} \quad 10a.$$

Die ältere Formel<sup>1)</sup> gibt in derselben Annäherung:

$$(\Delta)_n = \frac{l}{r} \left[ \frac{1}{\omega_1} (\gamma_1' - \gamma_1'') - \frac{1}{\omega} (\gamma' - \gamma'') \right].$$

Dieser letztere Werth zeigt, mit dem Ausdruck für  $(\Delta)_n$  verglichen, dass die angenäherte Formel mit der strengeren gleiche Resultate liefert, wenn:

$$\frac{l}{r \omega_1} (\gamma_1' - \gamma_1'') = h \pi$$

ist, nicht etwa, wenn die ganze gegenseitige Verzögerung  $= h \pi$  ist. Es wird demnach der Jamin'sche Compensator,

1) Quineke, Pogg. Ann. 132. p. 205. 1867.

nach der alten Formel berechnet, im Allgemeinen auch dann nicht genaue Werthe liefern, wenn man ihn nur benutzt, um die beobachteten Interferenzstreifen um ganze Streifenbreiten zu verschieben. Der Fehler wird aber nach dem Obigen unmerklich, wenn man die Platten des Compensators recht dick wählt.

Beiläufig sei auch darauf aufmerksam gemacht, dass, weil die Componenten des Lichtes, welche normal und parallel der Einfallsebene polarisirt sind, verschieden verzögert werden, schief auf eine Platte fallendes, linear polarisirtes Licht elliptisch polarisirt aus der Platte austritt.

Bei senkrechtem Einfall kann man die erhaltenen Resultate sogleich auf krystallinische Medien ausdehnen.

Man erhält z. B. für die gegenseitige Verzögerung der zwei senkrecht zu einander polarisirten Wellen, die mit den resp. Geschwindigkeiten  $\omega_1'$  und  $\omega_1''$  (entsprechend den Brechungscoefficienten  $n'$  und  $n''$ ) sich in einer Platte von der Dicke  $l$  parallel dem Einfallslothe fortpflanzen, den Werth:

$$(\Delta)_n = \arctg\left(\frac{n'^2+1}{2n'} \operatorname{tg} \frac{l}{\tau \omega_1'}\right) - \arctg\left(\frac{n''^2+1}{2n''} \operatorname{tg} \frac{l}{\tau \omega_1''}\right). \quad 11.$$

Hierin kann man in praxi stets  $n' = n'' = n$  setzen.

Der Ausdruck stimmt dann wiederum nur für:

$$\frac{l}{\tau} \left( \frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1''} \right) = h\pi$$

mit dem älteren:

$$(\Delta)_a = \frac{l}{\tau} \left( \frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1''} \right),$$

überein.

Wichtiger noch erscheint die Frage nach der genaueren Theorie eines der feinsten optischen Messinstrumente, des Babinet'schen Compensators.

Denkt man sich denselben möglichst einfach aus nur zwei (schwach keilförmigen, für die Rechnung als eben zu betrachtenden) Platten bestehend, so hat man doch fünf

Schichten, welche die Wellen durchschreiten, nämlich: Luft, Quarz, Luft, Quarz, Luft<sup>1)</sup>; die Rechnung wird demgemäss recht umständlich. Ich theile nur das Resultat mit.

Allgemein erhält man für die Differenz der Phasen  $\Delta_1$  der ersten Welle auf der Grenze der Medien (0,1) und (3,4), d. h. beim Eintritt in die erste und Austritt aus der letzten Platte bei senkrechtem Einfall die Formel:

$$\operatorname{tg} \Delta_1 = \frac{\nu_1 [c_3 (c_2 s_1 + s_2 c_1 \nu_3) - \nu_3 s_3 (s_1 s_2 - c_1 c_3 \nu_3)] + \nu_4 [s_3 (c_1 c_2 - s_1 s_2 \nu_3) + \nu_3 s_3 (c_1 s_2 + c_2 s_1 \nu_3)]}{[c_3 (c_1 c_2 - s_1 s_2 \nu_3) - \nu_3 s_3 (c_1 s_2 + c_2 s_1 \nu_3)] - \nu_1 \nu_4 [s_3 (s_1 c_3 + c_1 s_2 \nu_3) + \nu_3 c_3 (s_1 s_2 - c_1 c_3 \nu_3)]}, \quad 12.$$

worin die Verhältnisse der Brechungsindices:

$$\frac{n_0}{n_1} = \nu_1, \quad \frac{n_1}{n_2} = \nu_2, \quad \frac{n_2}{n_3} = \nu_3, \quad \frac{n_3}{n_4} = \nu_4$$

gesetzt sind, sowie:

$$\sin \frac{l_1}{r \omega_1} = s_1, \quad \sin \frac{l_2}{r \omega_2} = s_2, \quad \sin \frac{l_3}{r \omega_3} = s_3, \\ \cos \frac{l_1}{r \omega_1} = c_1, \quad \cos \frac{l_2}{r \omega_2} = c_2, \quad \cos \frac{l_3}{r \omega_3} = c_3.$$

Bei dem speciell vorliegenden Problem des Babinet'schen Compensators kann man wegen des geringen Unterschiedes von  $\omega_1$  und  $\omega_3$  und wegen  $\omega_0 = \omega_2 = \omega_4$  setzen:

$$\nu_1 = \nu_3 = \frac{1}{\nu_2} = \frac{1}{\nu_4} = \frac{1}{n}.$$

Hierdurch erhält man etwas einfacher:

$$\operatorname{tg} \Delta_1 = \frac{\frac{1}{2n} \sin \frac{l_2}{r \omega_2} \left[ (1+n^2) \cos \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right) - (1-n^2) \cos \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_1} - \frac{l_3}{\omega_3} \right) \right] + (1+n^2) \cos \frac{l_2}{r \omega_2} \sin \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right)}{2n \cos \frac{l_2}{r \omega_2} \cos \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right) - (1+n^2) \sin \frac{l_2}{r \omega_2} \sin \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right)}, \quad 13a.$$

Für die entsprechende Phasendifferenz der zweiten, normal zur ersteren polarisirten Welle erhält man, da diese sich in der ersten Platte mit der Geschwindigkeit  $\omega_3$ , in der zweiten mit  $\omega_1$  fortpflanzt:

1) Liegt der Compensator direct auf einer zu untersuchenden parallelen Krystallplatte, so ist dieselbe auch mit in das System hineinzurechnen, und die Resultate werden noch complicirter.

$$\operatorname{tg} \Delta_2 = \frac{\frac{1}{2n} \sin \frac{l_2}{r \omega_2} \left[ (1+n^2)^2 \cos \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right) - (1-n^2)^2 \cos \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_3} - \frac{l_3}{\omega_1} \right) \right] + (1+n^2) \cos \frac{l_2}{r \omega_2} \sin \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right)}{2n \cos \frac{l_2}{r \omega_2} \cos \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right) - (1+n^2) \sin \frac{l_2}{r \omega_2} \sin \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right)} \quad 13.$$

$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$  ist dann der gesuchte Werth der gegenseitigen Verzögerung beider Wellen, — ein höchst complicirter Ausdruck und von dem gewöhnlich benutzten stark abweichend. Besonders auffällig ist die scheinbar bedeutende Einwirkung der Dicke der Luftschicht zwischen den beiden Quarzplatten. Lässt man diese Zwischenschicht verschwinden, also  $l_2 = 0$  werden, so wird relativ einfach:

$$\Delta = \arctg \left( \frac{1+n^2}{2n} \operatorname{tg} \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right) \right) - \arctg \left( \frac{1+n^2}{2n} \operatorname{tg} \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right) \right), \quad 14.$$

was der Form nach mit (11) übereinstimmt. Eine andere einfachere Form erhält man, wenn man den Brechungscoefficienten der Schicht zwischen den beiden Quarzplatten, etwa durch Hineinbringen einer Flüssigkeit, dem des Quarzes merklich gleich macht, also setzt:

$$v_1 = \frac{1}{v_4} = \frac{1}{n}, \quad v_2 = v_3 = 1;$$

nämlich nach (12):

$$\Delta = \arctg \left( \frac{1+n^2}{2n} \operatorname{tg} \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_2}{\omega_2} + \frac{l_3}{\omega_3} \right) \right) - \arctg \left( \frac{1+n^2}{2n} \operatorname{tg} \frac{1}{r} \left( \frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_2}{\omega_2} + \frac{l_3}{\omega_1} \right) \right). \quad 15.$$

Unabhängig von  $l_2$  ist freilich auch sie nicht.

Unter der Voraussetzung, dass  $(n-1)^2/2n$  klein gegen Eins sei, erhält man daraus die Gleichung:

$$(\Delta)_n = \frac{l_1 - l_3}{r} \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_3} \right) + \frac{(n-1)^2}{2n} \cos \frac{1}{r} \left( (l_1 + l_3) \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_3} \right) + \frac{2l_2}{\omega_2} \right) \sin \frac{1}{r} (l_1 - l_3) \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_3} \right), \quad 15.$$

die deutlich die Abweichung von der älteren zeigt, welche allein das erste Glied enthält.

Man erkennt, dass die Differenz für:

$$\frac{1}{\tau}(l_1 - l_3)\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_3}\right) = h\pi$$

verschwindet; ihr grösstmöglicher Werth ist  $(n-1)^2/2n$ , also circa 0,1.

Man vermeidet diese theoretischen Schwierigkeiten des Babinet'schen Compensators nach dem p. 232 Erörterten am sichersten, indem man sowohl der Dicke der Quarzkeile als auch ihrem Abstände eine erhebliche Grösse gibt.

Göttingen, April 1884.

### VIII. Ueber den Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Schicht eines circularpolarisirenden Mediums; von W. Voigt.

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich die Grenzbedingungen erörtert, welche für den Uebergang des Lichtes aus einem gewöhnlichen isotropen in ein circularpolarisirendes Medium aufzustellen sind, um dem Princip der Erhaltung der Energie zu genügen, und habe dieselben bereits auf den Fall einer einfachen Reflexion angewandt. Es werde nun das praktisch wichtigere Problem des Durchganges des Lichtes durch eine Schicht der circularpolarisirenden Substanz vorgenommen, um vornehmlich zu untersuchen, wie die strenge Theorie das Gesetz der Drehung der Polarisations Ebene bei diesem Vorgang ergibt, welches bisher immer nur durch eine angenäherte Betrachtung (aus der Annahme, dass die Welle ohne innere Reflexionen bloss einmal die Platte passirt) abgeleitet ist.

Die Schicht des circularpolarisirenden Mediums (1) liege zwischen den Ebenen  $z=0$  und  $z=l$ , die  $XZ$ -Ebene sei

1) W. Voigt, Wied. Ann. 21. p. 522. 1884.

die Einfallsebene; von  $z = -\infty$  bis  $z = 0$  erstrecke sich ein erstes isotropes Medium (0), von  $z = l$  bis zu  $z = -\infty$  ein zweites (2).

Im ersten Medium (0) tritt dann ausser der einfallenden eine reflectirte Welle auf; ihre Richtungscosinus seien  $\alpha, \gamma$  und  $\alpha, -\gamma$ , die Verschiebungscomponenten:

$$\begin{aligned} u_e &= \gamma r_e, & v_e &= v_e, & w_e &= -\alpha r_e, \\ u_r &= -\gamma r_r, & v_r &= v_r, & w_r &= -\alpha r_r. \end{aligned}$$

Im zweiten, circularpolarisirenden Medium (1) treten je zwei Wellen auf, welche den Charakter der durchgehenden und den der reflectirten haben. Ihre Richtungscosinus seien demgemäss  $\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2$  und  $\alpha_1, -\gamma_1, \alpha_2, -\gamma_2$  und ihre Verschiebungscomponenten:

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma_1 r_1, & v_1 &= v_1, & w_1 &= -\alpha_1 r_1 \\ u_2 &= \gamma_2 r_2, & v_2 &= v_2, & w_2 &= -\alpha_2 r_2 \\ u_3 &= -\gamma_1 r_3, & v_3 &= v_3, & w_3 &= -\alpha_1 r_3 \\ u_4 &= -\gamma_2 r_4, & v_4 &= v_4, & w_4 &= -\alpha_2 r_4. \end{aligned}$$

Im dritten Medium gibt sich nur eine durchgehende Welle; ihre Richtungscosinus seien  $\alpha', \gamma'$ , und ihre Verschiebungscomponenten:

$$u_d = \gamma' r_d, \quad v_d = v_d, \quad w_d = -\alpha' r_d.$$

Die Grenzbedingungen wollen wir in der einfachsten Form<sup>2)</sup> benutzen, welche für die Normalcomponente der Verschiebung keine Abweichung von der Neumann'schen Formel enthält, nämlich setzen:

$$\begin{array}{l|l} \text{für } z = 0 & \begin{aligned} \alpha(r_e + r_r) &= \alpha_1(r_1 + r_3) + \alpha_2(r_2 + r_4) \\ \gamma(r_e - r_r) &= \gamma_1(r_1 - r_3) + \gamma_2(r_2 - r_4) \\ v_e + v_r &= (v_1 + v_3) + (v_2 + v_4) \\ \alpha\gamma(v_e - v_r) &= \alpha_1\gamma_1(v_1 - v_3) + \alpha_2\gamma_2(v_2 - v_4) \end{aligned} \\ & 1. \end{array}$$

1) Diese Verfügung hat gegenüber der anderen  $u_r = \gamma r_r, w_r = \alpha r_r$  den Nachtheil, dass die Grenzgleichungen für normalen Einfall nicht für die Componenten  $v$  und  $r$  identisch werden, aber den Vortheil, dass  $v$  und  $r$  in jeder Welle die gleiche relative Lage haben, also die Rotationsrichtung der circularen Wellen sich bequem beurtheilen lässt.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 21. p. 532. 1884.

$$\begin{aligned} \text{für } z = l \quad & \alpha' r_d = \alpha_1 (r_1 + r_3) + \alpha_2 (r_2 + r_4) \\ & \gamma' r_d = \gamma_1 (r_1 - r_3) + \gamma_2 (r_2 - r_4) \\ & v_d = (v_1 + v_3) + (v_2 + v_4) \\ & \alpha' \gamma' v_d = \alpha_1 \gamma_1 (v_1 - v_3) + \alpha_2 \gamma_2 (v_2 - v_4). \end{aligned}$$

1.

Hierin sei:

$$\begin{aligned} r_e &= E_p S & v_e &= E' S + E'' C \\ r_r &= R_p'' S_r + R_p'' C_r & v_r &= R_s' S_r + R_s'' C_r \\ r_1 &= \Delta_1' S_1 + \Delta_1'' C_1 & v_1 &= \Delta_1'' S_1 - \Delta_1' C_1 \\ r_2 &= \Delta_2' S_2 + \Delta_2'' C_2 & v_2 &= -\Delta_2'' S_2 + \Delta_2' C_2 \\ r_3 &= P_1' S_3 + P_1'' C_3 & v_3 &= P_1'' S_3 - P_1' C_3 \\ r_4 &= P_2' S_4 + P_2'' C_4 & v_4 &= -P_2'' S_4 + P_2' C_4 \\ r_d &= D_p' S_d + D_p'' C_d & v_d &= D_s' S_d + D_s'' C_d, \end{aligned}$$

2.

worin bedeutet:

$$\begin{aligned} S &= \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right) & C &= \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right) \\ S_r &= \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) & C_r &= \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) \\ S_1 &= \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) & C_1 &= \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) \\ S_2 &= \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_2 x + \gamma_2 z}{\omega_2} \right) & C_2 &= \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_2 x + \gamma_2 z}{\omega_2} \right) \\ S_3 &= \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right) & C_3 &= \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right) \\ S_4 &= \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_2 x - \gamma_2 z}{\omega_2} \right) & C_4 &= \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha_2 x - \gamma_2 z}{\omega_2} \right) \\ S_d &= \sin \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega'} \right) & C_d &= \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega'} \right). \end{aligned}$$

Die Einführung ergibt 16 Gleichungen mit 16 Unbekannten und sehr unübersichtliche Resultate.

Ich werde demgemäss schon von Anfang an die Vereinfachung vornehmen, dass ich ausserhalb der trigonometrischen Functionen  $S$  und  $C$  die in Wahrheit äusserst nahe gleichen Grössen  $\alpha_1 \alpha_2$  und  $\gamma_1 \gamma_2$  einander gleich setze; hierdurch kann nichts in einer der Beobachtung irgend merklichen Weise geändert werden. Ferner werde ich direct auf die Bestimmung nur der zumeist wichtigen Grössen  $D$ , d. h. der Amplituden der durch die Platte hindurchgehenden



Wellen ausgehen. Ihre Werthe können dann, wenn erwünscht, leicht auch die analogen Grössen  $R$  für die reflectirte Welle ergeben.

Durch Elimination von  $r_3, r_4, v_3, v_4$  aus (1) erhält man zunächst folgende Gleichungen, falls bedeutet:

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha \gamma_1 + \alpha_1 \gamma & x &= \alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma & \sigma &= \alpha \gamma + \alpha_1 \gamma_1 & \delta &= \alpha \gamma - \alpha_1 \gamma_1 \\ \lambda' &= \alpha' \gamma_1 + \alpha_1 \gamma' & x' &= \alpha' \gamma_1 - \alpha_1 \gamma' & \sigma' &= \alpha' \gamma + \alpha_1 \gamma_1 & \delta' &= \alpha' \gamma - \alpha_1 \gamma_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ist für } z = 0 & \quad \lambda r_e + x r_r = 2 \alpha_1 \gamma_1 (r_1 + r_2) \\ & \quad \sigma v_e - \delta v_r = 2 \alpha_1 \gamma_1 (v_1 + v_2) \\ \text{für } z = l & \quad \lambda' r_d = 2 \alpha_1 \gamma_1 (r_1 + r_2) \\ & \quad \sigma' v_d = 2 \alpha_1 \gamma_1 (v_1 + v_2). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 3.$$

Durch Einsetzen der Werthe hieraus:

$$\begin{aligned} \lambda E_p + x R_p' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1' + \Delta_2') \\ x R_p'' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1'' + \Delta_2'') \\ \sigma E_s' - \delta R_s' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1' - \Delta_2') \\ \sigma E_s'' - \delta R_s'' &= -2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1' - \Delta_2') \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 4a.$$

$$\begin{aligned} \lambda' D_p' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1' c_1 + \Delta_1'' s_1 + \Delta_2' c_2 + \Delta_2'' s_2) \\ \lambda' D_p'' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (-\Delta_1' s_1 + \Delta_1'' c_1 - \Delta_2' s_2 + \Delta_2'' c_2) \\ \sigma' D_s' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (-\Delta_1' s_1 + \Delta_1'' c_1 + \Delta_2' s_2 - \Delta_2'' c_2) \\ \sigma' D_s'' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (-\Delta_1' c_1 - \Delta_1'' s_1 + \Delta_2' c_2 + \Delta_2'' s_2) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 4b.$$

Hierin bedeutet:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin \frac{l \gamma_1}{r \omega_1}, & c_1 &= \cos \frac{l \gamma_1}{r \omega_1}, \\ s_2 &= \sin \frac{l \gamma_2}{r \omega_2}, & c_2 &= \cos \frac{l \gamma_2}{r \omega_2}. \end{aligned}$$

Dividirt man beide Seiten mit  $\sqrt{2}$ , so erhält man in (4b) rechts ein orthogonales System Coëfficienten und kann sonach sogleich schreiben:

$$\begin{aligned} 2 \alpha_1 \gamma_1 \Delta_1' &= \frac{1}{2} [\lambda' (D_p' c_1 - D_p'' s_1) - \sigma' (D_s' s_1 + D_s'' c_1)] \\ 2 \alpha_1 \gamma_1 \Delta_1'' &= \frac{1}{2} [\lambda' (D_p' s_1 + D_p'' c_1) + \sigma' (D_s' c_1 - D_s'' s_1)] \\ 2 \alpha_1 \gamma_1 \Delta_2' &= \frac{1}{2} [\lambda' (D_p' c_2 - D_p'' s_2) + \sigma' (D_s' s_2 + D_s'' c_2)] \\ 2 \alpha_1 \gamma_1 \Delta_2'' &= \frac{1}{2} [\lambda' (D_p' s_2 + D_p'' c_2) - \sigma' (D_s' c_2 - D_s'' s_2)] \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 5.$$

Setzt man dies in (4a) ein, so erhält man vier Gleichungen, die frei von den  $\Delta$  und  $P$  sind, nämlich:

$$\begin{aligned}
 \lambda E_p + \kappa R_p' &= \frac{1}{2} \left[ \lambda' \left( D_p' (c_1 + c_2) - D_p'' (s_1 + s_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sigma' (D_s' (s_1 - s_2) + D_s'' (c_1 - c_2)) \right] \\
 \kappa R_p'' &= \frac{1}{2} \left[ \lambda' \left( D_p' (s_1 + s_2) + D_p'' (c_1 + c_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma' (D_s' (c_1 - c_2) - D_s'' (s_1 - s_2)) \right] \\
 \sigma E_s' - \delta R_s' &= \frac{1}{2} \left[ \lambda' \left( D_p' (s_1 - s_2) + D_p'' (c_1 - c_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma' (D_s' (c_1 + c_2) - D_s'' (s_1 + s_2)) \right] \\
 \sigma E_s'' - \delta R_s'' &= \frac{1}{2} \left[ \lambda' \left( -D_p' (c_1 - c_2) + D_p'' (s_1 - s_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma' (D_s' (s_1 + s_2) + D_s'' (c_1 + c_2)) \right]
 \end{aligned} \quad 6.$$

Ein analoges System folgt, indem man aus (1)  $r_1 r_2 v_1 v_2$  eliminirt, wodurch man zunächst erhält:

$$\begin{aligned}
 \text{für } z = 0 & \qquad \qquad \qquad z = l \\
 \kappa r_e + \lambda r_r &= 2\alpha_1 \gamma_1 (r_3 + r_4) & \kappa' r_d &= 2\alpha_1 \gamma_1 (r_3 + r_4) \\
 -\delta v_e + \sigma v_r &= 2\alpha_1 \gamma_1 (v_3 + v_4) & -\delta' v_d &= 2\alpha_1 \gamma_1 (v_3 + v_4)
 \end{aligned} \quad 7.$$

oder durch Einsetzen der Werthe:

$$\begin{aligned}
 \kappa E_p + \lambda R_p' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' + P_2') \\
 \lambda R_p'' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1'' + P_2'') \\
 -\delta E_s' + \sigma R_s' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' - P_2') \\
 -\delta E_s'' + \sigma R_s'' &= -2\alpha_1 \gamma_1 (P_1'' - P_2'')
 \end{aligned} \quad 8_a.$$

$$\begin{aligned}
 \kappa' D_p' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' c_1 - P_1'' s_1 + P_2' c_2 - P_2'' s_2) \\
 \kappa' D_p'' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' s_1 + P_1'' c_1 + P_2' s_2 + P_2'' c_2) \\
 -\delta' D_s' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' s_1 + P_1'' c_1 - P_2' s_2 - P_2'' c_2) \\
 -\delta' D_s'' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (-P_1' c_1 + P_1'' s_1 + P_2' c_2 - P_2'' s_2)
 \end{aligned} \quad 8_b.$$

Auch die Coëfficienten der vier Gleichungen (8<sub>b</sub>) geben, wenn man beide Seiten durch  $\sqrt{2}$  dividirt, ein orthogonales System, und man kann daher schreiben:

$$\begin{aligned}
 2\alpha_1 \gamma_1 P_1' &= \frac{1}{2} [\kappa' (D_p' c_1 + D_p'' s_1) - \delta' (D_s' s_1 - D_s'' c_1)] \\
 2\alpha_1 \gamma_1 P_1'' &= \frac{1}{2} [\kappa' (-D_p' s_1 + D_p'' c_1) - \delta' (D_s' c_1 + D_s'' s_1)] \\
 2\alpha_1 \gamma_1 P_2' &= \frac{1}{2} [\kappa' (-D_p' c_2 + D_p'' s_2) + \delta' (D_s' s_2 - D_s'' c_2)] \\
 2\alpha_1 \gamma_1 P_2'' &= \frac{1}{2} [\kappa' (-D_p' s_2 + D_p'' c_2) + \delta' (D_s' c_2 + D_s'' s_2)]
 \end{aligned} \quad 9.$$

Das Einsetzen dieser Resultate in die vier Gleichungen (8<sub>a</sub>) ergibt:

$$\begin{aligned}
 \alpha E_p + \lambda R_p' &= \frac{1}{4} \left[ \begin{aligned} &\alpha' (D_p'(c_1 + c_2) + D_p''(s_1 + s_2)) \\ &- \delta' (D_s'(s_1 - s_2) - D_s''(c_1 - c_2)) \end{aligned} \right] \\
 \lambda R_p'' &= \frac{1}{4} \left[ \begin{aligned} &\alpha' (-D_p'(s_1 + s_2) + D_p''(c_1 + c_2)) \\ &- \delta' (D_s'(c_1 - c_2) + D_s''(s_1 - s_2)) \end{aligned} \right] \\
 -\delta E_s' + \sigma R_s' &= \frac{1}{4} \left[ \begin{aligned} &\alpha' (-D_p'(s_1 - s_2) + D_p''(c_1 - c_2)) \\ &- \delta' (D_s'(c_1 + c_2) + D_s''(s_1 + s_2)) \end{aligned} \right] \\
 -\delta E_s'' + \sigma R_s'' &= \frac{1}{4} \left[ \begin{aligned} &-\alpha' (D_p'(c_1 - c_2) + D_p''(s_1 - s_2)) \\ &+ \delta' (D_s'(s_1 + s_2) - D_s''(c_1 + c_2)) \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \quad 10.$$

Die Combination von (10) mit (6) lässt leicht die sämtlichen  $R$  eliminiren und gibt die vier Gleichungen für die hindurchgegangenen Amplituden:

$$\begin{aligned}
 2E_p(\lambda^2 - \alpha^2) &= D_p'(c_1 + c_2)(\lambda\lambda' - \alpha\alpha') - D_p''(s_1 + s_2)(\lambda\lambda' + \alpha\alpha') \\
 &\quad - D_s'(s_1 - s_2)(\lambda\sigma' - \alpha\delta') - D_s''(c_1 - c_2)(\lambda\sigma' + \alpha\delta') \\
 0 &= D_p'(s_1 + s_2)(\lambda\lambda' + \alpha\alpha') + D_p''(c_1 + c_2)(\lambda\lambda' - \alpha\alpha') \\
 &\quad + D_s'(c_1 - c_2)(\lambda\sigma' + \alpha\delta') - D_s''(s_1 - s_2)(\lambda\sigma' - \alpha\delta') \\
 2E_s(\sigma^2 - \delta^2) &= D_p'(s_1 - s_2)(\sigma\lambda' - \delta\alpha') + D_p''(c_1 - c_2)(\sigma\lambda' + \delta\alpha') \\
 &\quad + D_s'(c_1 + c_2)(\sigma\sigma' - \delta\delta') - D_s''(s_1 + s_2)(\sigma\sigma' + \delta\delta') \\
 2E_s''(\sigma^2 - \delta^2) &= -D_p'(c_1 - c_2)(\sigma\lambda' + \delta\alpha') + D_p''(s_1 - s_2)(\sigma\lambda' - \delta\alpha') \\
 &\quad + D_s'(s_1 + s_2)(\sigma\sigma' + \delta\delta') + D_s''(c_1 + c_2)(\sigma\sigma' - \delta\delta').
 \end{aligned} \quad 11.$$

Durch Einsetzen von  $s_1 = s_2 = s$ ,  $c_1 = c_2 = c$  gelangt man hiervon zu den Formeln für die durch eine gewöhnliche isotrope Platte hindurchgegangenen Amplituden.<sup>1)</sup>

Das System Coëfficienten dieser vier Gleichungen hat die Form:

$$\begin{array}{cccc}
 a & b & c & d \\
 -b & a & -d & c \\
 e & f & g & h \\
 -f & e & -h & g
 \end{array}$$

und demgemäss merkwürdige Eigenschaften. Früher habe ich den Satz mitgetheilt, dass die Determinante dieses Systems  $\Pi$  die Summe zweier Quadrate ist<sup>2)</sup>; nämlich:

$$\Pi = (ag + df - bh - ec)^2 + (bg + ah - fc - ed)^2.$$

1) Vgl. Formel (2) und (5) der vorhergehenden Abhandlung.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 16. p. 314. 1882.

Setzt man dafür:

$$\Pi = K_1^2 + K_2^2, \quad | \quad 12.$$

so lassen sich auch die Partialdeterminanten von  $\Pi$  in eigenthümlicher Weise durch  $K_1$  und  $K_2$  ausdrücken.

Es ist nämlich, wenn ich mit  $\Pi_{h,x}$  den Coëfficienten des  $x$  Elementes der  $h$ . Reihe bezeichne:

$$\begin{array}{ll} \Pi_{11} = gK_1 + hK_2; & \Pi_{13} = -hK_1 + gK_2; \\ \Pi_{13} = -eK_1 - fK_2; & \Pi_{14} = fK_1 - eK_2; \\ \Pi_{21} = +hK_1 - gK_2; & \Pi_{22} = gK_1 + hK_2; \\ \Pi_{23} = -fK_1 + eK_2; & \Pi_{24} = -eK_1 - fK_2; \\ \Pi_{31} = -cK_1 - dK_2; & \Pi_{33} = dK_1 - cK_2; \\ \Pi_{33} = aK_1 + bK_2; & \Pi_{34} = -bK_1 + aK_2; \\ \Pi_{41} = -dK_1 + cK_2; & \Pi_{43} = -cK_1 - dK_2; \\ \Pi_{43} = bK_1 - aK_2; & \Pi_{44} = aK_1 + bK_2. \end{array} \quad | \quad 13.$$

Man kann nun die gesuchten Grössen  $D$  ohne weiteres hinschreiben, und zwar mit Hülfe der Formeln (13) in bequemer Form, z. B.:

$$(K_1^2 + K_2^2) D_p' = 8a\gamma a_1\gamma_1 [E_p (gK_1 + hK_2) - E_s' (cK_1 + dK_2) - E_s'' (dK_1 - cK_2)],$$

ebenso die anderen; die Werthe der noch übrigen Abkürzungen einzuführen, lohnt nicht. Fällt linear polarisirtes Licht ein, so ist  $E_s'' = 0$ .

Zu bemerken ist zu diesen Resultaten, dass sie unter der Voraussetzung unbegrenzter Wellen erhalten sind, also bei schiefe Einfall nur dann Anwendung auf die Beobachtung gestatten, wenn diese mit Platten der circularpolarisirenden Substanz angestellt ist, welche sehr ausgedehnt gegen ihre Dicke sind. Ferner ist nöthig, dass die Substanz sehr vollständig durchsichtig sei, damit die durch wiederholte innere Reflexionen entstandenen Wellen, welche bei unseren Betrachtungen in Rechnung gezogen sind, nicht durch Absorption unverhältnissmässig geschwächt werden.

Die Hauptfrage ist die nach der Grösse der Drehung der Polarisationssebene beim Durchgang durch unsere Platte.

Zunächst bemerkt man, dass einfallendes linear polarisirtes Licht — gerade wie bei einer Platte aus gewöhnlicher

isotroper Substanz — im Allgemeinen elliptisch polarisirt austritt, wenn auch bei kleinem Einfallswinkel die Abweichung von linearem gering ist.

Die Winkel  $\varphi$  und  $(\pi/2) + \varphi$  der grossen und kleinen Ellipsenaxe gegen die Einfallsebene sind gegeben durch:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(D_s' D_p' + D_s'' D_p'')}{(D_p'^2 + D_p''^2) - (D_s'^2 + D_s''^2)}. \quad 14.$$

Dieser Ausdruck wird relativ einfach, wenn das einfallende Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene schwingt, im ersten Falle ist nämlich:

$\Pi D_p' = \Pi_{11} E_p$ ,  $\Pi D_p'' = \Pi_{12} E_p$ ,  $\Pi D_s' = \Pi_{13} E_p$ ,  $\Pi D_s'' = \Pi_{14} E_p$ ,  
und:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{2(eg + hf)}{(e^2 + f^2) - (g^2 + h^2)}. \quad 14_a.$$

im letzteren  $E_s'' = 0$ ,  $E_s' = E_s$  also:

$\Pi D_p' = \Pi_{31} E_s$ ,  $\Pi D_p'' = \Pi_{32} E_s$ ,  $\Pi D_s' = \Pi_{33} E_s$ ,  $\Pi D_s'' = \Pi_{34} E_s$ ,  
und:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_2 = \frac{2(ac + bd)}{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)}. \quad 14_b.$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned} a &= (c_1 + c_2)(\lambda\lambda' - \kappa\kappa'), & b &= -(s_1 + s_2)(\lambda\lambda' + \kappa\kappa') \\ c &= -(s_1 - s_2)(\lambda\sigma' - \delta\delta'), & d &= -(c_1 - c_2)(\lambda\sigma' + \delta\delta') \\ e &= (s_1 - s_2)(\sigma\lambda' - \delta\kappa'), & f &= (c_1 - c_2)(\sigma\lambda' + \delta\kappa') \\ g &= (c_1 + c_2)(\sigma\sigma' - \delta\delta'), & h &= -(s_1 + s_2)(\sigma\sigma' + \delta\delta'). \end{aligned}$$

Die Ausdrücke lassen sich nach Einsetzen dieser Werthe etwas vereinfachen, bleiben aber immer noch umfangreich genug.

Der wichtigste Fall ist der des senkrechten Einfalles, dessen Beobachtung ja bekanntlich benutzt wird, um die Differenz der Geschwindigkeiten der beiden im circularpolarisirenden Körper fortgepflanzten Wellen zu bestimmen. Indem man von den inneren Reflexionen absieht und die Welle nur einmal die Dicke der Platte passirend denkt, nimmt man bekanntlich den Drehungswinkel der Polarisationsebene gewöhnlich gleich  $l/2r(1/\omega_1 - 1/\omega_2)$  an. Es ist nun die Frage, welcher Werth aus der strengen Theorie, die jene inneren Reflexionen berücksichtigt, erhalten wird.

Für senkrechten Einfall wird:

$$fg = eh$$

und demgemäss:

$$(eg + hf)^2 = (e^2 + f^2)(g^2 + h^2),$$

also:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \left( \sqrt{\frac{g^2 + h^2}{e^2 + f^2}} \right)_{\alpha=0},$$

was auch aus  $\operatorname{tg} \varphi_0 = D_s/D_p$  direct zu erhalten wäre.

Die Berechnung ergibt:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} \frac{l}{2\tau} \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right),$$

d. h. denselben Werth, wie die ungenauere Theorie; die inneren Reflexionen sind also ohne Einfluss.

Dies erklärt sich dadurch, dass die rechts rotirende Welle an der zweiten Fläche links rotirend reflectirt wird, d. h. (da diese Bezeichnung sich auf eine Betrachtung von der Seite der positiven Wellennormale bezieht und diese für die einfallende und reflectirte Welle entgegengesetzt liegt) ihre absolute Rotationsrichtung bei der Reflexion nicht ändert, und dass das analoge bei der zweiten (links rotirenden) Welle stattfindet. Beide Wellen verlieren also beim Rückgang nach der ersten Grenze den Gangunterschied, den sie auf dem Hergang gewonnen hatten, und beginnen zum zweiten mal ihren Weg von der ersten Grenze mit demselben Gangunterschied, den sie beim Eintritt in die Platte besaßen.

Dies lässt sich aus unseren Formeln in der That direct bestätigen.

Fällt circularpolarisirtes rechts rotirendes Licht auf die erste Grenze senkrecht auf, so ist zu setzen  $E_p = E_s'' = E$ ,  $E_s' = 0$ . Dann muss nothwendig die durch die Platte durchgehende Welle ebenfalls rechts rotiren, d. h. also  $\Delta_1' = \Delta_1'' = 0$  sein. Daraus folgt nach (4<sub>a</sub>), da für senkrechten Einfall  $\lambda = \sigma$ ,  $z = d$  ist, dass  $R_p' = -R_s''$  und  $R_p'' = R_s'$  sein muss. Dies ergibt aber für die in der Platte reflectirte Welle nach (8<sub>a</sub>)  $P_1' = P_2'' = 0$ ; die innere reflectirte Welle ist also eine links rotirende. Dasselbe gilt wegen  $R_p'' = R_s'$  und  $R_p' = -R_s''$  von der aussen an der Platte reflectirten.

Hiermit hängt zusammen, dass eine senkrecht auf die Platte auffallende Welle, welche linear polarisirt ist, bei der Reflexion, trotzdem diese mit einem wiederholten Durchgehen durch die Platte verbunden ist, keine Drehung der Polarisationsebene erleidet. Denn setzt man in (4<sub>1</sub>) und (8<sub>1</sub>)  $E_s' = E_s'' = 0$  und wie nach der Symmetrie nöthig:

$$\Delta_1' = \Delta_1'' = \Delta_2' = \Delta_2'' \text{ und } P_1' = P_1'' = P_2' = P_2'',$$

so wird  $R_s' \text{ und } R_s'' = 0$ .

Diese Resultate sind um so auffälliger, als in anderen Hinsichten das gewöhnliche angenäherte Verfahren, das Verhalten der durchgegangenen Wellen nach der direct (ohne wiederholte innere Reflexionen) durchgegangenen zu beurtheilen, merkliche Fehler verursachen kann, wie ich in der vorhergehenden Mittheilung gezeigt habe.

Göttingen, im März 1884.

**IX. Herstellung der japanischen magischen Spiegel und Erklärung der magischen Erscheinungen derselben<sup>1)</sup>;  
von Hantchi Muraoka in Japan.**

Dass eine gewisse Sorte des japanischen bronceenen Spiegels den Namen „magischer Spiegel“ erhalten hat, kommt von den folgenden zwei merkwürdigen Erscheinungen her, welche er zeigt. 1) Fängt man das von dem Spiegel reflectirte Licht auf einer weissen Wand auf, so kommt das Bild der Figuren zum Vorschein, welche hinter dem Spiegel eingeprägt sind, und die sonst an der Spiegeloberfläche unsichtbar sind, und zwar erscheinen bei Anwendung divergenten Lichtes die dickeren Stellen, also die, an welchen die hinteren Figuren erhaben sind, lichtstärker als die übrigen. 2) Macht man auf die hintere Fläche des Spiegels mit einer Messerspitze einen Riss, so wird derselbe auch in der Pro-

<sup>1)</sup> Auszug aus einer japanischen technischen Zeitschrift „Tokio Gakugeisai“.



jection sichtbar. Die Stelle des Risses ist im divergenten Licht ebenfalls lichtstärker. Mit diesen beiden Erscheinungen, welche in Japan selbst wenig bekannt waren, haben viele Physiker sich beschäftigt. Zu den älteren Beobachtungen gehören die von Stan. Julien<sup>1)</sup>, Segurier<sup>2)</sup>, Maillard<sup>3)</sup> u. a. m. In neuerer Zeit wurden die Spiegel untersucht von R. W. Atkinson<sup>4)</sup>, R. D. Darbishire<sup>5)</sup>, S. P. Thompson<sup>6)</sup>, J. Parnell<sup>7)</sup>, E. Masse<sup>8)</sup>, E. W. Ayrton und J. Perry<sup>9)</sup>, A. Bertin und J. Duboscq<sup>10)</sup>, und L. Laurent.<sup>11)</sup> Auch in Japan selbst sind einige Beobachtungen gemacht worden von Jamakawa, Mendenhol, Person, Goto u. s. w., welche hier und da in unbedeutenden Zeitschriften veröffentlicht sind.

Im Folgenden theile ich meine eigenen Untersuchungen mit und werde zeigen, dass erstens der magische Spiegel bloß durch Dünnschleifen sich herstellen lässt, zweitens dass die beiden oben genannten Erscheinungen gleiche Ursache haben. Ferner werde ich den Beweis liefern, dass die Eigenschaft, magisch zu sein, nicht bloß den japanischen Bronzen zukommt, sondern vielmehr ganz allgemein ist. — Die Aufgaben, die wir aufzulösen haben, sind zunächst: 1) Warum erscheinen die hinteren Figuren? 2) Wie lassen sich die magischen Spiegel herstellen?

Die erste Frage ist von den oben genannten Physikern anfänglich ganz falsch, später aber zweifellos richtig beant-

1) Stan. Julien, *Compt. rend.* **24**. p. 999. 1847.

2) Segurier, *l. c.* p. 1001.

3) Maillard, *Comp. rend.* **37**. p. 173—180. 1853.

4) Atkinson, *Nature* **14**. p. 62.

5) Darbishire, *l. c.* p. 142—143.

6) Thompson, *l. c.* p. 162.

7) Parnell, *l. c.* p. 227—228.

8) Masse, *Journ. d. Phys.* **6**. p. 320. 1877.

9) Ayrton und Perry, *Proc. Roy. Soc.* **28**. p. 127—148. 1878; *Roy. Inst.* **24**. Jan.; *Nature* **19**. p. 539—542. 1878—79.

10) Bertin und Duboscq, *Ann. d. chem. et d. phys.* (5) **20**. p. 143 bis 144; *l. c.* (5) **22**. p. 472—513.

11) Laurent, *Comp. rend.* **92**. p. 412—413.

wortet worden, indem sie nachgewiesen haben, dass der japanische Spiegel, welcher immer mehr oder weniger convex ist, auf seiner Oberfläche nicht überall gleiche Convexität hat. Die Stellen nämlich, die den hinten erhabenen Stellen der Figur entsprechen, sind weniger convex, als die übrigen. Der einfachste Beweis dafür ist, nach Person, dass, wenn man auf die Spiegeloberfläche ein Stück Papier mit einer kleinen Oeffnung bringt und die Divergenz des reflectirten Lichtes untersucht, die Zerstreuung an der dicken Stelle geringer ist, als an anderen Stellen, weshalb die Erscheinung eintritt. Die Stelle, welche dem Riss entspricht, ist ebenfalls weniger convex. Die anderen Beweise muss ich hier übergehen und auf die Originale hinweisen.

Die zweite Aufgabe ist, soviel ich weiss, noch von keinem der genannten Physiker genügend gelöst worden, und den Spiegelfabrikanten selbst ist die Herstellung des magischen Spiegels nicht bekannt, vielmehr bekommen sie solche Spiegel blos zufällig. Soviel wusste man schon, dass alle Spiegel, die magische Eigenschaft zeigen, sehr dünn sind. Ich nahm nun viele gewöhnliche japanische Spiegel und schliif sie alle so dünn wie möglich. Es ergab sich, dass alle japanischen Spiegel magisch werden, wenn man sie einfach dünn genug schleift.

Wenn hiermit die zweite Aufgabe gelöst ist, so fragt es sich drittens: warum werden die hinten dickeren und die hinten gerissenen Stellen weniger convex? Die Beantwortung dieser Frage wurde mir möglich durch Mittheilung eines geheimen Kunstgriffes von Hrn. Tsuda, einem der grössten Spiegelfabrikanten in Tokio. Soll nämlich ein Spiegel, dessen Oberfläche durch mechanischen Druck hohl geworden ist, reparirt werden, so geschieht dies nicht etwa durch Hammerschläge von der hinteren Seite, weil dabei der Spiegel Sprünge bekommen kann, sondern man nimmt einen Eisenstab mit abgerundeter, aber rauher Spitze und reibt auf der concaven Stelle hin und her, sodass man feine netzartige Risse bekommt; diese Operation nennt man in der Technik der Spiegelfabrikation „Mege“. Die Stelle erhebt sich dann von selbst und wird etwas mehr convex als die Umgebung. Es

wird dann diese Erhöhung mit einem „Shen“, einem dazu bestimmten Messer, abgescheert, bis die Convexität überall gleich wird. Ist dies geschehen, so wird die ganze Oberfläche neu geschliffen, polirt und amalgamirt. Die technischen Sachen, wie man die Gleichheit der Convexität prüft, und wie das Messer eingerichtet ist u. s. w., will ich hier ganz übergehen. Diese Thatsache des Kunstgriffes nun ist in vollständiger Uebereinstimmung mit der zweiten Erscheinung des Japanspiegels; denn, wenn die Spiegeloberfläche durch einen Riss auf der Rückseite weniger convex wird, so kommt dies offenbar daher, weil die hintere Fläche convex oder erhöht wird.

Zur näheren Untersuchung verfertigte ich viele Messingpiegel von der Dicke etwa  $\frac{1}{2}$  mm und der Grösse 9 qcm und gab der hinteren Fläche Risse mit scharfen Spitzen, wie Messer und Nadel, mit stumpfen Stäben, mit rauhen Flächen, wie Feilen. Die vorderen Spiegelflächen wurden dabei alle an der gestrichenen Stelle hohl. Ich machte ferner auf der Rückseite Risse mit Sand, schliiff dieselbe mit rauhem und feinem Schleifstein und bekam dadurch immer eine concave vordere Spiegelfläche. Wurde dagegen die hintere geschliffene Fläche polirt und amalgamirt, so war die Convexität dieser Fläche deutlich sichtbar. Es steht dies mit der „Megeerscheinung“ vollständig in Einklang; denn etwas schleifen heisst doch nichts anderes, als feine Risse machen. Es zeigte sich ferner, dass die Erhebung durch Schleifen um so erheblicher ist, je dünner die Metalle sind. Aus diesen Versuchen folgt also, dass erstens die Messingplatten die Eigenschaft haben, durch Schleifen nach der geschliffenen Seite convex zu werden, zweitens dass die Convexität von der Dicke abhängig ist, und zwar um so grösser, je dünner die Platte ist.

Wenn also eine Messingplatte an verschiedenen Stellen ungleiche Dicke hat, wie der japanische Spiegel, so müssen nothwendig beim Schleifen die dünneren Stellen sich stärker krümmen, als die dickeren, wodurch die Verschiedenheit der Convexität entsteht, und die magische Erscheinung hervor gebracht wird. Dass alle japanischen Spiegel immer mehr

oder weniger convex sind, wenn sie nicht mit Absicht concav gemacht werden, ist auch eine nothwendige Folge des Schleifens, und es war in der That unmöglich, bei Anwendung ebener Schleifsteine einen nicht erhabenen Messingspiegel herzustellen. Es folgt ferner daraus, dass die beiden Erscheinungen des magischen Spiegels, wenn sie auch äusserlich sich ganz widersprechen, identischen Ursprungs, (nämlich des Risses) sind. Ist nun hiermit die dritte Frage erledigt, so kommt die vierte hinzu: 4) Warum verursachen die Risse die Erhebung der Fläche?

Die Ursache muss entweder in der Erzeugung der Wärme oder in der mechanischen Wirkung des Ritzens oder Schleifens, oder endlich in der Molecularspannung des Metalles liegen. Sollte die Wärme die Ursache sein, so müsste die Krümmung auch dann erfolgen, wenn die Platte einfach an einer Fläche erwärmt oder mit weicheeren Substanzen, wie Kork, Tuch, Knochen, gerieben wird, was aber nicht im geringsten der Fall ist. Zur Krümmung sind also Risse nothwendig. Sollte die mechanische Wirkung der Grund sein, so müsste ein Riss, der auf chemischem Wege gegeben wird, keine Krümmung hervorbringen. Ich überzog die Messingplatte mit Wachs, gab ihm einen Riss mit weicher Spitze, ätzte diese Stelle mit Salpetersäure und erhielt die Krümmung immer, wenn die Aetzung tief genug war. Die mechanische Wirkung kann demnach auch nicht die Ursache sein.

Die einzige Erklärung, welche noch für die Erscheinung übrig bleibt, ist die Spannung. Die Molecüle, welche anfänglich einander Gleichgewicht hielten, nehmen durch Wegnahme eines Theiles derselben, eben durch den Riss, eine neue Gleichgewichtslage an, welche Erscheinung wir in auffallendster Weise bei Glathränen, Bologneser Glas u. s. w. beobachten.

Endlich fragt es sich, kommt die magische Eigenschaft blos der japanischen Bronze zu? Für Messing ist schon der zweite Theil der magischen Eigenschaft nachgewiesen. Um die erste Eigenschaft zu prüfen, löthete ich an eine Messingplatte ein Metallkreuz, machte die andere Fläche zu einem

Spiegel auf üblichem Wege und bekam einen magischen Spiegel, der also das Kreuz im reflectirten Licht zeigte. Für andere Substanzen, wie Kupfer, Blei, Zink, Eisen, Stahl, Glas u. s. w., liess sich die Eigenschaft ohne Ausnahme nachweisen, nur beschränkte ich den Versuch blos auf die zweite Eigenschaft, da beide ja gleichen Ursprunges sind. Bei manchen Metallen bekam ich, besonders wenn die Platte zu dünn war, wie die Eisenplatte, welche gewöhnlich für Telephone angewendet wird, gerade das verkehrte Resultat; durch Ritzen wurde nämlich die gegenüberliegende Seite gehoben. Es kommt dies einfach daher, dass durch zu starken Druck die Elasticitätsgrenze leicht überschritten wird. Nahm ich aber bei einer solchen Platte ein Lineal und machte den Riss mit feiner Messerspitze ganz leise, so gelangte ich doch zu dem richtigen Resultat. Die Eigenschaft, magisch zu sein, ist demnach allen festen Körpern, wenigstens den angewandten ziemlich zahlreichen Substanzen gemeinschaftlich.

Oft ist die Erscheinung vorhanden, ohne dass man sie erkennt, wenn man nicht sehr vorsichtig beobachtet. Ich beobachtete nicht die Erhebung der gerissenen Fläche, sondern vielmehr die Vertiefung der anderen Fläche in folgender Weise. Ich schliff, polirte, amalgamirte zunächst die nicht zu ritzende Fläche, beobachtete, nachdem der Riss gemacht, die Entstehung der Doppelbilder einer in gehöriger Entfernung sich befindlichen, mit dem Riss parallelen Lichtspalte oder Flamme. Auch bei sehr dünner Glasplatte, wie die mikroskopischen Deckglasplatten, war die Wirkung des Risses bemerkbar. Hierbei war aber die beschriebene Beobachtungsweise wegen der doppelten Reflexion nicht anwendbar. Ich wendete deshalb die Methode von Person<sup>1)</sup> an, nämlich ich brachte an die nicht gerissene Fläche eine zweite Deckglasplatte. Durch leisen Druck bekam ich an den beiden Seiten des Risses schöne Farbenringe, zum Beweis, dass die Stelle dem Risse gegenüber vertieft ist. Nach Goto<sup>2)</sup> soll die Krümmung durch den Riss mit der Zeit zunehmen.

1) Person, Gakugeishirn. Nr. 39.

2) Goto, Tokio-Gakugeisassl. Nr. 22. p. 35.

Um dies zu bestätigen, nahm ich Winkelmessungen an verschiedenen Spiegelplatten vor, indem ich der hinteren Fläche einen langen Riss gab und mittelst eines Goniometers den Winkel bestimmte, welchen die beiden Bilder eines an das Goniometer angebrachten hellen Streifens bildeten. Während mehrerer Stunden und Tage bekam ich keine Aenderung desselben. Danach beruht die Behauptung von Goto wahrscheinlich auf Täuschung. — Der Winkel, den ich so erhielt, betrug zwei bis vier Minuten. Diese Erscheinung könnte man vielleicht technisch anwenden, z. B. zur Herstellung eines sehr stumpfen Winkels.

Hiermit glaube ich, alle Räthsel des magischen Spiegels gelöst zu haben.

#### X. Die Abhängigkeit des von einer Influenzmaschine erster Art gelieferten Stromes von der Feuchtigkeit; von R. Krüger.

(Hierzu Taf. II Fig. 6.)

In der Abhandlung des Hrn. Prof. Riecke<sup>1)</sup> über die von einer Influenzmaschine zweiter Art gelieferten Electricitätsmengen und ihre Abhängigkeit von der Feuchtigkeit ist ein Zusammenhang zwischen den Electricitätsmengen, welche bei einer Umdrehung der Scheibe durch den Querschnitt des Leitungsdrahtes gehen, und der Feuchtigkeit durch eine nach Potenzen der letzteren fortschreitenden Reihe zu geben versucht, und zwar unter den speciellen Annahmen, dass der Differentialquotient  $de/d\varphi$  für  $\varphi = 0$  verschwindet, und dass nur das quadratische Glied der Entwicklung in Rechnung gezogen wird. Die Genauigkeit der Beobachtungsreihen, welche zu der Begründung jenes Zusammenhanges dienten, war einerseits durch das Schwanken der Temperatur bei verschiedenen Feuchtigkeitsgraden — es ist hier wie im Folgenden stets die relative Feuchtigkeit verstanden — beeinträchtigt, andererseits war es auch nicht wohl möglich, bei

1) Riecke, Wied. Ann. 13. p. 255. 1881.



den damaligen geringen experimentellen Hilfsmitteln grössere Unterschiede in dem Feuchtigkeitsgehalte der Luft zu erzielen.

In der vorliegenden Arbeit ist nun eine besondere Sorgfalt darauf verwandt, in den bezeichneten beiden Dingen eine möglichst grosse Annäherung an die zur Prüfung der Formel, welche die Abhängigkeit der Electricitätsmenge von der Feuchtigkeit darstellen soll, erforderliche Genauigkeit zu erhalten, und ist es nicht nur gelungen, ein Schwanken der Temperatur bis auf Theile eines Grades herabzudrücken, sondern auch einen Unterschied von fast 60 Proc. in den Feuchtigkeitszuständen der Luft herbeizuführen.

Ein Glaskasten von 70 cm Länge, 40 cm Breite und 55 cm Höhe, dessen innerer Raum durch einen fest anliegenden Deckel vollkommen gegen die äussere Atmosphäre abgeschlossen werden konnte, nahm die Influenzmaschine erster Art in sich auf. Es war dieses dieselbe Maschine, welche von Hrn. F. Kohlrausch zu seinen Untersuchungen über den von einer Influenzmaschine erzeugten Strom nach absolutem Maass<sup>1)</sup> verwandt wurde, nur war bei den jetzigen Versuchen die doppelte Ueberführung durch Schnüre in der Weise abgeändert, dass die Axe der Rolle, welche direct durch Schnurlauf mit der Axe der beweglichen Scheibe in Verbindung stand, durch die Glaswand zu einem später noch genauer zu beschreibenden Laufwerk geführt wurde. Der mittlere Abstand der beiden Scheiben voneinander betrug 1,75 mm; der mittlere Abstand der Spitzen von der beweglichen Scheibe 3,8 mm. Auf zwei gegenüberliegenden Längsseiten des Kastens waren die beiden horizontalen Conductoren und die Drehungsaxe der Maschine luftdicht durch die Wände hindurchgeführt. Ausserdem befanden sich zum Zwecke der Erneuerung der Luft im Kasten je ein enges Messingrohr in den Breitseiten, welche Oeffnungen auch bei der Controle der Hygrometer ihre Verwendung fanden, indem der Schlauch vom Aspirator zum Regnault'schen Condensationshygrometer hindurchgeführt wurde.

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 135. p. 121. 1868.



Die Drehungsaxe der Maschine war mit einem nach den Angaben des Hrn. Rossetti<sup>1)</sup> angefertigten Laufwerk verbunden, welches seinerseits durch Gewichte, welche je nach der Umdrehungsgeschwindigkeit zwischen 8 und 32 kg schwankten, in Bewegung gesetzt wurde. Bei einer Umdrehung derjenigen Axe des Laufwerkes, welche mit der Drehungsaxe der Maschine verbunden war, fiel das Gewicht um 0,005 622 4 m, während die bewegliche Scheibe der Maschine in derselben Zeit 2,71 Umdrehungen machte. Das andere Ende derselben Axe des Laufwerkes stand mit einer Schraube ohne Ende in Zusammenhang, welche in einem bestimmten Zeitmoment durch Heben und Senken eines Zahnrades das Zählerwerk in die Bewegung der Maschine ein- oder ausschaltete.

Die Feuchtigkeitsverhältnisse werden durch zwei in den Kasten eingebrachte Klinkerfues'sche Hygrometer von ziemlich gut übereinstimmendem Gange gemessen; es besaßen dieselben statt der gewöhnlichen Metallumhüllung eine solche von Glas.

Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Angaben der Klinkerfues'schen Hygrometer und der des Regnault'schen Condensationshygrometers für die ganze Reihe der zur Beobachtung gelangten Feuchtigkeitszustände der Luft; dieselbe enthält die Resultate dreier verschiedener Beobachtungsreihen mit allmählich steigenden Feuchtigkeitsgraden. Eine solche Trennung der Beobachtungen war nothwendig, weil sich bei plötzlichen bedeutenden Aenderungen in den Feuchtigkeitsverhältnissen die Hygrometer nicht so gleich dem neuen Zustande anbequemten, sondern gewöhnlich hinter dem wahren Werthe zurückblieben. Die hier angegebenen Zahlen wurden erst dann aufgesucht, wenn man sicher sein konnte, dass die Hygrometer einen festen Stand angenommen.

Die mit dem Regnault'schen Hygrometer gefundenen Werthe können auf grosse Genauigkeit Anspruch machen weil zur Bestimmung des Thaupunktes ein Verfahren ange-

1) Rosetti, Nuov. Cim. (2) 12, p. 98. 1874.

Klinker- fues			Klinker- fues			Klinker- fues		
Regnault	Correct.		Regnault	Correct.		Regnault	Correct.	
1. 19,0	14,4	+1,4	36,4	35,6	-0,8	54,8	51,4	-2,9
2. 10,8		+3,6	36,4		-0,8	54,7		-3,3
1. 19,3	20,3	+1,0	40,0	38,4	-1,6	63,6	60,7	-2,9
2. 17,5		+2,8	41,4		-3,0	63,9		-3,2
1. 26,5	26,7	+0,2	43,0	40,7	-2,3	70,7	68,8	-2,4
2. 25,0		+1,7	44,0		-3,3	71,9		-3,6
1. 31,5	30,8	-1,2	51,3	48,6	-2,7	77,6	74,8	-2,8
2. 32,5		-2,2	52,4		-3,8	79,3		-4,5
1. 36,6	35,7	-0,9	56,6	53,8	-2,8			
2. 36,6		-0,9	57,1		-3,3			

wandt wurde, welches die kleinste Veränderung an der Oberfläche der polirten Cylinderflächen bemerkbar machte. Die von einem feinen Spalt ausgehenden Lichtstrahlen wurden an den Metallflächen in ein Fernrohr reflectirt, welches die Bilder nicht scharf wiedergab, sondern soweit ausgezogen war, dass die beiden Lichtstreifen theilweise übereinander lagerten. Man erhielt dadurch in einem dunklen Gesichtsfelde zwei verschieden stark beleuchtete Streifen, ein intensiveres Licht aus der Mitte, von beiden Seiten ein etwas matteres. Trat nun die Feuchtigkeit an der einen Fläche auf, so wurde damit das vorige Licht, welches noch zum Auge gelangte, vernichtet, und es blieb nur ein matt beleuchteter Streifen im Gesichtsfelde zurück; doch war es durchaus nicht nothwendig, das vollständige Verschwinden des Lichtes abzuwarten, die Helligkeitsänderung des mittleren Streifens zeigte schon ganz geringe Oberflächenveränderungen an; die grösste Differenz in der Temperatur beim Erscheinen und Verschwinden der Feuchtigkeit war  $0,9^{\circ}$  C.

Die Ladung der Influenzmaschine musste von aussen geschehen und wurde dieselbe mit Hülfe einer Reibungselectrisirmaschine in folgender Weise bewirkt. Conductor und Reibzeug wurden je mit einem der horizontalen Conductoren der Influenzmaschine verbunden, welche bis auf eine Entfernung von 1—1,5 cm einander genähert waren. Die Scheibe der Influenzmaschine wurde jetzt in langsame Bewegung versetzt und von der zweiten Maschine Electricität zugeführt, was anfangs ein Ueberspringen der Funken zwischen den beiden Conductoren bewirkte, dann aber diese wieder verschwinden

liess und dafür mehr und mehr Electricitätsmengen auf die bewegliche Scheibe und in die Belege schaffte, bis das Wiederauftreten der Funken zwischen den Conductoren die selbständige Thätigkeit der Influenzmaschine anzeigte.

Was nun die Bestimmung des von der Influenzmaschine erzeugten Stromes anbetrifft, so geschah dieselbe mit einem grossen Meyerstein'schen Galvanometer, dessen astatisches Nadelpaar eine Schwingungsdauer von 33,028 Secunden besass. Die innere Nadel war umgeben von einem starken Kupferringe, der die Schwingungen des Systems so dämpfte, dass das Verhältniss zweier aufeinander folgenden Elongationen 1,688 war. Die Intensität des Stromes wurde im absoluten Maass nach der Formel:

$$i = \frac{MT(1+\theta)}{C} \varphi$$

bestimmt, wo  $M = m_i - m_a$ , die Differenz der magnetischen Momente der beiden Nadeln, sich aus der Formel:

$$M = \frac{\pi^2 K}{t^2(1+\theta)T}$$

$M = 3\,193\,640$  (mm. mg. sec) ergab; für die Horizontalintensität am Orte des Galvanometers fand man  $T = 1,925$ ; der Torsionscoefficient war  $\theta = 0,6773$ ; unter  $\varphi$  ist der Ablenkungswinkel verstanden, in Bogenmaass für den Radius Eins ausgedrückt, und  $C$  ist die Empfindlichkeit des Galvanometers und ist zu berechnen mit Hülfe der folgenden Formel:

$$C = \sqrt{\frac{2\pi K \sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}}{t} \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} - \frac{\lambda'}{\sqrt{\pi^2 + \lambda'^2}} \right\}}.$$

Diese ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für gedämpfte Schwingungen:

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left( \frac{C^2}{w} + P^2 \right) \frac{d\varphi}{dt} + [(m_i - m_a)T + D] \varphi = 0,$$

wo unter  $K$  das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, unter  $w$  der Widerstand des in sich geschlossenen Multipliatoren verstanden ist; mit  $D$  ist die Torsionsconstante bezeichnet, und durch  $P^2 (d\varphi/dt)$  ist das Drehungsmoment aus-

gedrückt, welches etwa der Luftreibung, einer elastischen Nachwirkung sein Entstehen verdankt. Ist  $\lambda$  das logarithmische Decrement bei in sich geschlossenem Multiplicator und  $\tau$  die zu  $\lambda$  gehörige Schwingungsdauer der Nadeln, so gilt die Gleichung:

$$2 \frac{\lambda}{\tau} = \frac{1}{K} \left\{ \frac{C^2}{w} + P^2 \right\}.$$

Bei geöffnetem Multiplicator ist  $C = 0$  und es bestimmt sich  $P^2$  durch die Gleichung:

$$\frac{P^2}{K} = 2 \frac{\lambda'}{\tau'},$$

wo  $\lambda'$  Luftdämpfung bezeichnet, und  $\tau'$  zu  $\lambda'$  in derselben Beziehung steht, als  $\tau$  zu  $\lambda$ . Setzt man diesen Werth für  $P^2/K$  in die frühere Gleichung ein und reducirt dann die verschiedenen Schwingungsdauern durch die Gleichungen:

$$\frac{\tau^2}{\pi^2 + \lambda^2} = \frac{\tau'^2}{\pi^2 + \lambda'^2} = \frac{\tau''^2}{\pi^2 + \lambda_0^2}$$

sämmtlich auf die Schwingungsdauer ohne Dämpfung, so erhält man den oben angegebenen Werth für den Empfindlichkeitscoefficienten des Galvanometers.

Das Trägheitsmoment wurde durch Schwingungsdauerbeobachtungen mit Hülfe der Formel:

$$K = k \frac{\ell^2}{\ell'^2 - \ell^2}$$

bestimmt; das Trägheitsmoment  $k$  war durch zwei cylindrische Messingkörper von zusammen 199 966 mg Gewicht dargestellt, welche auf Spitzen in einer Entfernung von 99,854 mm von der Drehungsaxe aufgesetzt wurden. Die Grösse  $K$  war:

$$K^1) = 11397 \cdot 10^5 \text{ mg} \cdot \text{mm}^2.$$

Der Widerstand der Multiplicatorwindungen wurde einmal mit der Dämpfungsmethode, sodann noch mit der Wheatstone'schen Combination bestimmt und es ergab sich der Werth:

$$w = 18898,35 \cdot 10^6 \text{ (absolutes Maass).}$$

1) Nach früher von Weber und Kohlrausch angestellten Beobachtungen waren die Werthe für das Trägheitsmoment  $11320 \cdot 10^5$ , resp.  $11347 \cdot 10^5$ . Die Differenzen sind durch den verschiedenen Abstand eines an der Suspension befindlichen Laufgewichtes von der Drehungsaxe bedingt.

Für die Empfindlichkeit des Galvanometers ergab sich demnach der Werth:

$$C = 69611 \cdot 10^4$$

und schliesslich zur numerischen Berechnung der Stromstärke die Formel:

$$i = 0,014725 \cdot \varphi \text{ nach magnet. Maass (mm, mg, s.)}$$

Zur Erläuterung der Beobachtungsart möge hier das Protocoll einer Beobachtungsreihe mitgetheilt werden; es ist die Reihe, welche sich auf den Feuchtigkeitsgrad 25,1 Proc. bezieht, ausgewählt.

Temperatur im Zimmer 9,1°.

Procente der relativen Feuchtigkeit 25,1 Proc.

Entfernung von Spiegel und Scala 2815 mm.

Ruhelage 749,6.

#### Geladene Maschine.

	Hygrometer	Therm.	Gewicht	Umdrehungen	Zeit	Umkehrpunkte	Mittel
1.	24,7°	5,8° R.	22,450 kg	65,7	22 <sup>m</sup> 20 <sup>s</sup> — 24 <sup>m</sup> 0 <sup>s</sup>	829,2 834,4 847,0	839,4
2.	23,3 „	5,9° „	22,450 „	65,6	27 30 — 29 10	846,2 842,0 835,9	839,5
			26,210 „	114,1	42 10 — 43 50	916,3 909,9 900,8	907,0
1.	24,8 „	5,8° „	26,220 „	114,4	47 5 — 48 45	894,9 899,7 917,7	907,5
2.	23,3 „	5,9° „	26,220 „	114,5	53 20 — 55 0	896,1 900,5 916,5	907,4
1.	24,7 „	5,9° „	30,900 „	141,3	16 45 — 18 25	938,7 943,6 957,3	949,2
2.	23,2 „	5,9° „	30,900 „	141,4	20 30 — 22 10	956,0 955,1 942,5	949,0

Temperatur im Zimmer 9,3°.

Ruhelage 749,4.

#### Ungeladene Maschine.

Gewicht	Zeit	Umdrehungen
9,140 kg	40 <sup>m</sup> 20 <sup>s</sup> — 42 <sup>m</sup> 0 <sup>s</sup>	65,7
9,130 „	45 20 — 47 0	64,8
12,810 „	50 20 — 52 0	114,4
12,810 „	55 20 — 57 0	114,5
17,170 „	2 20 — 4 0	141,3
17,160 „	6 20 — 8 0	141,1

Die Umdrehungsgeschwindigkeiten der beweglichen Scheibe lassen sich aus den hier beobachteten durch Multiplication mit 2,71 berechnen. Es sollte die Stromintensität für die drei Umdrehungsgeschwindigkeiten 1,778, 3,100 und 3,829 bestimmt werden; es waren also vom Zähler in 100 Secunden 65,61, resp. 114,39 und 141,29 Umdrehungen der treibenden Axe des Laufwerkes anzuzeigen. Die geringen Schwankungen der Magnetnadel um ihre neue Ruhelage wurde dadurch erreicht, dass die Maschine nicht sofort die ganze Geschwindigkeit erhielt, sondern erst dann in volle Thätigkeit gesetzt wurde, wenn die Nadel den äussersten Punkt bei einer geringeren Umdrehungsgeschwindigkeit erreicht hatte. Aus den Gewichten, die sich stets um 0,01 kg unterscheiden, wurde das für die gesuchte Umdrehungsgeschwindigkeit nothwendige Gewicht durch Interpolation berechnet und auch die Stromstärke darauf reducirt. Wie es sich später zeigen wird, ist die Stromstärke nicht direct der Umdrehungsgeschwindigkeit proportional, doch kann man wohl bei so kleinen Differenzen der Stromstärken Proportionalität zwischen diesen beiden Grössen voraussetzen. In derselben Weise wurde auch das Gewicht bestimmt, welches bei ungeladener Maschine dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit hervorbringen sollte.

In der folgenden Tabelle sind nun die Beobachtungen nach steigenden Procenten der relativen Feuchtigkeit angeordnet. Jeder Feuchtigkeitsgrad weist drei unter sich verschiedene, aber für alle Zeilen gleiche Umdrehungsgeschwindigkeiten der Scheibe auf.  $P$  ist das treibende Gewicht bei geladener Maschine,  $p$  das bei ungeladener Maschine für dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit. Die mit  $i/n$  bezeichnete Reihe gibt Beispiele zu dem von Hrn. Rossetti aufgestellten Satze, dass bei wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit die Stromstärke schneller wächst, als die Umdrehungszahl. Auf diesen Umstand wird später noch einmal zurückgegangen, weil sich daran eine merkwürdige Eigenschaft des Coëfficienten des quadratischen Gliedes der Reihenentwicklung für die Stromstärke knüpft.

$n$	$i$	$\frac{i}{n}$	$P$	$P$	$q$	$t$
1,778	0,000 252 9	0,000 142 2	24,082	9,149	14,2%	7,0
3,100	0,000 441 2	0,000 142 3	27,749	12,811		
3,829	0,000 558 2	0,000 144 4	32,340	17,170		
1,778	0,000 245 0	0,000 137 8	23,302	9,140	19,7 „	6,6
3,100	0,000 428 7	0,000 138 3	27,028	12,810		
3,829	0,000 539 4	0,000 140 8	31,646	17,168		
1,778	0,000 234 7	0,000 132 0	22,450	9,139	25,1 „	7,3
3,100	0,000 412 5	0,000 133 0	26,219	12,810		
3,829	0,000 521 4	0,000 136 1	30,899	17,169		
1,778	0,000 223 8	0,000 125 9	21,662	9,142	29,8 „	7,2
3,100	0,000 395 2	0,000 127 5	25,482	12,814		
3,829	0,000 502 0	0,000 131 1	30,212	17,173		
1,778	0,000 185 8	0,000 104 5	18,965	9,151	42,3 „	7,3
3,100	0,000 334 8	0,000 108 0	22,957	12,819		
3,829	0,000 435 3	0,000 113 7	27,822	17,177		
1,778	0,000 073 8	0,000 041 2	12,479	9,150	66,7 „	7,3
3,100	0,000 156 7	0,000 050 5	16,899	12,816		
3,829	0,000 236 4	0,000 061 7	22,152	17,173		
1,778	0,000 030 6	0,000 017 2	10,435	9,156	73,9 „	7,6
3,100	0,000 088 9	0,000 028 7	14,951	12,822		
3,829	0,000 162 8	0,000 042 5	20,394	17,185		

Es ist wohl nicht ohne Interesse, dieser Tabelle einige Zahlen hinzuzufügen, welche, an derselben Maschine beobachtet, aus der oben erwähnten Arbeit des Hrn. F. Kohlrausch entnommen sind. Leider ist dort kein sicherer Schluss auf die Entfernung der beiden Scheiben voneinander, sowie auf die der Spitzen von der beweglichen Scheibe zu machen; ausserdem sind nur die Grenzen der beobachteten relativen Feuchtigkeit — 0,42 und 0,58 — angegeben, weil bei der Arbeit die Abhängigkeit der Stromstärke von der Feuchtigkeit nicht untersucht wurde. Die dort verzeichneten Scalenausschläge  $p$  sind nach der ebenfalls in der Abhandlung gegebenen Formel:

$$i = 0,000\,002\,51 \cdot p$$

in Stromstärken nach absolutem Maass verwandelt. Auch hier ist  $n$  die Umdrehungszahl der Scheibe.

$n =$	2	3	6	9
$i =$	0,000 075 30	0,000 108 18	0,000 222 88	0,000 343 87.



Eine Vergleichung dieser Werthe mit Werthen, welche in der Tabelle etwa in der Mitte zwischen 42,3 und 66,7 Proc. liegen könnten, zeigt, dass die damals gefundenen Werthe bedeutend kleinere sind; wie diese Differenzen zu beseitigen sind, lässt sich nach den enthaltenen Angaben in jener Arbeit nicht feststellen.

Die Abhängigkeit des von der Influenzmaschine erzeugten Stromes von der relativen Feuchtigkeit möge dargestellt werden in der Form:

$$i = i_0 - \alpha \varrho^2 = i_0 \left( 1 - \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} \right)$$

wo  $i_0$  diejenige Stromstärke bedeutet, welche man bei Abwesenheit jeglicher Feuchtigkeit erhalten würde und  $\varrho_0$  umgekehrt den Feuchtigkeitsgrad bezeichnet, für welchen die Maschine aufhören würde, zu arbeiten. Um die Richtigkeit dieser Formel zu prüfen, wird die vorhergehende Tabelle in folgende drei zerlegt; eine jede derselben enthält die Stromstärken, welche sich auf dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit beziehen.

Umdrehungszeit  $n = 1,778$ .

beobachtet	berechnet	$\varrho$
		Proc.
0,000 252 9	0,000 252 90	14,2
0,000 245 0	0,000 245 02	19,7
0,000 234 7	0,000 234 80	25,1
0,000 223 8	0,000 223 89	29,8
0,000 185 8	0,000 185 81	42,3
0,000 073 3	0,000 073 42	66,7
0,000 030 6	0,000 030 65	73,9

Umdrehungszeit  $n = 3,100$ .

beobachtet	berechnet	$\varrho$
		Proc.
0,000 441 2	0,000 441 21	14,2
0,000 428 7	0,000 428 73	19,7
0,000 412 5	0,000 412 52	25,1
0,000 395 2	0,000 395 24	29,8
0,000 334 8	0,000 334 88	42,3
0,000 156 7	0,000 156 76	66,7
0,000 088 9	0,000 088 96	73,9

Umdrehungszeit  $n = 3,829$ .

beobachtet	berechnet	$\varrho$
		Proc.
0,000 553 2	0,000 552 94	14,2
0,000 539 4	0,000 539 05	19,7
0,000 521 4	0,000 521 03	25,1
0,000 502 0	0,000 501 81	29,8
0,000 435 3	0,000 434 68	42,3
0,000 236 4	0,000 236 54	66,7
0,000 162 8	0,000 161 16	73,9

Combinirt man die Werthe für die Stromstärke zu je zwei in jeder Tabelle und berechnet  $\alpha$  und  $i_0$  nach den Formeln:

$$\alpha = \frac{i - i_1}{\varphi_1^2 - \varphi^2}, \quad i_0 = \frac{i\varphi_1^2 - i_1\varphi^2}{\varphi_1^2 - \varphi^2}, \quad \varphi_0^2 = \frac{i_0}{\alpha},$$

so erhält man für jede der drei Umdrehungsgeschwindigkeiten 21 Werthe für die Stromstärke bei vollkommen trockener Luft, und eine ebenso grosse Anzahl Werthe für die Coëfficienten  $\alpha$  und die Grössen  $\varphi_0$ . Aus diesen 21 Werthe-paaren jeder Tabelle sind die arithmetischen Mittel gezogen und danach die den beobachteten zur Seite gestellten Stromstärken berechnet. Die Mittelwerthe weichen, wie die folgende Zusammenstellung zeigt, nur um geringe Beträge von den einzelnen Grössen, aus denen sie sich hergeleitet haben, ab, obgleich die Zahlen für die Umdrehungsgeschwindigkeit 3,829 gewählt sind, bei welchen die grössten Differenzen zwischen beobachteter und berechneter Stromstärke auftreten. Die den einzelnen Gliedern vorgesetzten beiden römischen Zahlen geben an, aus welcher Combination das Resultat gewonnen ist.

I.	II	$\alpha = 0,739 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 12$	$\varphi_0 = 87,67$
I.	III	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 19$	$\varphi_0 = 87,46$
I.	IV	$\alpha = 0,745 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 26$	$\varphi_0 = 87,28$
I.	V	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 18$	$\varphi_0 = 87,49$
I.	VI	$\alpha = 0,745 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 26$	$\varphi_0 = 87,29$
I.	VII	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 18$	$\varphi_0 = 87,49$
II.	III	$\alpha = 0,745 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 38$	$\varphi_0 = 87,31$
II.	IV	$\alpha = 0,748 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 49$	$\varphi_0 = 87,15$
II.	V	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 668\ 26$	$\varphi_0 = 87,47$
II.	VI	$\alpha = 0,746 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 39$	$\varphi_0 = 87,28$
II.	VII	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 24$	$\varphi_0 = 87,49$
III.	IV	$\alpha = 0,751 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 71$	$\varphi_0 = 87,02$
III.	V	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 15$	$\varphi_0 = 87,50$
III.	VI	$\alpha = 0,746 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 570\ 16$	$\varphi_0 = 87,42$
III.	VII	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 15$	$\varphi_0 = 87,50$
IV.	V	$\alpha = 0,739 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 567\ 69$	$\varphi_0 = 87,61$
IV.	VI	$\alpha = 0,747 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 24$	$\varphi_0 = 87,29$
IV.	VII	$\alpha = 0,741 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 567\ 88$	$\varphi_0 = 87,51$
V.	VI	$\alpha = 0,747 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 569\ 18$	$\varphi_0 = 87,23$
V.	VII	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 16$	$\varphi_0 = 87,50$
VI.	VII	$\alpha = 0,727 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 559\ 91$	$\varphi_0 = 87,75$
Mittel		$\alpha = 0,744 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 567\ 96$	$\varphi_0 = 87,32$

Die Formeln, nach welchen die Werthe für die Stromstärken in den nach den Umdrehungsgeschwindigkeiten geordneten Tabellen berechnet sind, würden sich demnach in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} n = 1,778 \quad i &= 0,000\,261\,424 - 0,42257 \cdot 10^{-7} \cdot \varrho^2 \\ i &= 0,000\,261\,424 \left(1 - \frac{\varrho^2}{78^2,65}\right) \\ n = 3,100 \quad i &= 0,000\,454\,722 - 0,66973 \cdot 10^{-7} \cdot \varrho^2 \\ i &= 0,000\,454\,722 \left(1 - \frac{\varrho^2}{82^2,40}\right) \\ n = 3,829 \quad i &= 0,000\,567\,965 - 0,74490 \cdot 10^{-7} \cdot \varrho^2 \\ i &= 0,000\,567\,965 \left(1 - \frac{\varrho^2}{87^2,32}\right) \end{aligned}$$

Die mit Hülfe dieser Formeln gefundenen Werthe zeigen eine so gute Uebereinstimmung mit den beobachteten Werthen, dass man die Formel:

$$i = i_0 - \alpha \varrho^2 = i_0 \left(1 - \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}\right)$$

wenigstens bis zu Feuchtigkeitsgraden von 75% als einen genauen Ausdruck des Gesetzes betrachten kann, durch welches die Abhängigkeit der von einer Influenzmaschine gelieferten Ströme von der Feuchtigkeit bestimmt wird.

Drückt man die bisher im magnetischen Maasse gegebenen Stromstärken in mechanischem Maasse aus und dividirt durch die Umdrehungszahl, so erhält man die während einer Umdrehung der Scheibe durch den Querschnitt des Leitungsdrahtes strömenden electrostatischen Electricitätsmengen. Transformirt man danach die Grössen  $\alpha$ , so entstehen die Formeln zur Berechnung der Electricitätsmengen, welche sich in folgender Form schreiben würden:

$$\begin{aligned} n = 1,778 \quad e &= 457,34 \cdot 10^5 - 7392,56 \varrho^2 \\ e &= 457,34 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{\varrho^2}{78^2,65}\right) \\ n = 3,100 \quad e &= 456,26 \cdot 10^5 - 6719,90 \varrho^2 \\ e &= 456,26 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{\varrho^2}{82^2,40}\right) \\ n = 3,829 \quad e &= 461,38 \cdot 10^5 - 6051,14 \varrho^2 \\ e &= 461,38 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{\varrho^2}{87^2,32}\right) \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen ist auch die von Hrn. Prof. Riecke aufgestellte Vermuthung, dass der Werth von  $\alpha/n$  mit wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit kleiner werde, als bewiesen zu betrachten. Mit Rücksicht auf die zweite Form der Gleichungen würde sich derselbe Umstand so ausdrücken, dass bei wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit auch zugleich die Grössen  $\rho_0$  wachsen, d. h. die Maschine wird bei um so höheren Feuchtigkeitsgraden in Thätigkeit zu erhalten sein, je grösser die Umdrehungsgeschwindigkeit ist. Dass nicht etwa Temperaturänderungen die Verschiedenheit der Coëfficienten herbeigeführt haben, muss wohl als vollständig ausgeschlossen betrachtet werden, weil bei den ganzen Beobachtungsreihen die grösste Temperaturdifferenz  $1,0^\circ \text{ C.}$  beträgt.

Es möge hier noch auf einen Unterschied in der Bezeichnungsweise aufmerksam gemacht werden. Während in der Abhandlung des Hrn. Prof. Riecke unter  $\rho$  die relative Feuchtigkeit verstanden wird, ist in der vorliegenden Arbeit mit derselben Grösse der Procentsatz der relativen Feuchtigkeit bezeichnet; es erleidet dadurch nur der Coëfficient  $\alpha$  eine Aenderung, indem derselbe um ebensoviel wächst, als  $\rho^2$  fällt. Im Princip führen beide Bezeichnungsweisen auf dasselbe hinaus, und gelten deshalb die dort aufgestellten Sätze auch für diese Bezeichnungsart umgekehrt.

Dass eine so bedeutende Differenz zwischen den Electricitätsmengen, welche die Maschine bei Abwesenheit jeglicher Feuchtigkeit liefert, in beiden Arbeiten besteht, hat vielleicht darin seinen Grund, dass bei diesen Beobachtungen die Spitzen der Electrodenkämme näher an die bewegliche Scheibe der Influenzmaschine erster Art herangebracht waren, als dort bei der Maschine zweiter Art.

Als Resultate der Untersuchung würden sich folgende Sätze aufstellen lassen:

1. Die Abhängigkeit des von einer Influenzmaschine gelieferten Stromes von der Feuchtigkeit lässt sich durch die Formel:

$$i = i_0 - \alpha \rho^2 = i_0 \left( 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right).$$

für jede relative Feuchtigkeit mit vollkommener Genauigkeit darstellen.

2. Die Constante  $\rho_0 = \sqrt{i_0}/u$  wird bei wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit grösser, d. h. der Strom der Influenzmaschine verschwindet bei grösserer Umdrehungsgeschwindigkeit erst bei höheren Feuchtigkeitsgraden, als bei geringerer Geschwindigkeit.

3. Die bei Abwesenheit jeglicher Feuchtigkeit durch eine Umdrehung der Scheibe gelieferte Electricitätsmenge ist von der Umdrehungsgeschwindigkeit im wesentlichen unabhängig, und zwar beträgt hierbei die durch den Querschnitt des Leitungsdrahtes gehende Electricitätsmenge  $458,33 \cdot 10^6$  electrostatischer Einheiten.

Einige Beobachtungen, die zur Ermittlung der Abhängigkeit der Stromstärke von der Entfernung der Spitzen von der beweglichen Scheibe und andererseits der beiden Scheiben voneinander angestellt wurden, ergaben nur ein Abnehmen der Stromstärke bei grösserer Entfernung; ein bestimmtes Gesetz aufzustellen, war bisher unmöglich.

Göttingen, im März 1884.

# **XI. Ueber den Einfluss des Extrastromes auf die Bewegung eines Magnetes innerhalb eines dämpfenden Multipliers; von E. Dorn in Darmstadt.**

In meiner Abhandlung: „Die Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass“<sup>1)</sup>, habe ich den Einfluss des Extrastromes auf die Bewegung des gedämpften Magnetes in Rechnung gezogen. Gegen die Richtigkeit der dort von mir aufgestellten Formel<sup>2)</sup> sind von Hrn. H. Wild Einwendungen erhoben worden<sup>3)</sup>, und Hr. Wild glaubt, den

1) E. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 773 ff. 1892.

2) l. c. p. 783 Formel (39).

3) H. Wild, Nachtrag zu der „Bestimmung des Werthes der Siemens'schen Widerstandseinheit in absolutem electromagnetischem Maasse.“ 1884. Ein Auszug aus dieser Arbeit wird demnächst in den Annalen erscheinen. Die Red.

Betrag des von der Selbstinduction herrührenden Termes auf das Doppelte erhöhen zu müssen

Ich bin daher genöthigt, auf diesen Gegenstand noch einmal zurückzukommen, und will zunächst meine eigene Ableitung der in Rede stehenden Formel mittheilen, wesentlich wie ich sie bereits vor etwa vier Jahren niedergeschrieben habe.

Da Hr. Wild eine Stütze seiner Ansicht in einer Formel von Maxwell<sup>1)</sup> zu finden meint, so will ich zeigen, dass diese Formel entweder falsch<sup>2)</sup> oder praktisch unbrauchbar ist. Bezüglich der Berechnungsweise des Hrn. Wild besteht aber, wie ich ausdrücklich hervorheben will, eine solche Alternative nicht, vielmehr ist sie einfach unrichtig.

Schliesslich werde ich die von mir schon in meiner früheren Arbeit kurz angedeutete Modification des Maxwell'schen Grundgedankens<sup>3)</sup> etwas ausführlicher darlegen und auch von diesem anderen Ausgangspunkte meine Endformel nochmals ableiten.

Es sei im Anschluss an die Bezeichnung bei Maxwell  $A$  das Trägheitsmoment des schwingenden Magnetes,

$B(dq/dt)$  ein vom Luftwiderstande herrührender Term,

$C$  die Directionskraft des Magnetes (incl. Torsion etc.),

$G$  die Galvanometerconstante,

$m$  das Moment des Magnetes,

$\gamma$  die Stromstärke,

$R$  der Widerstand des Stromkreises bei geschlossenem Multiplicator in absolutem Maasse,

$L$  der Coëfficient der Selbstinduction,

$\varphi$  der Ablenkungswinkel,

so ist für den geöffneten Multiplicator:

$$(1) \quad A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = 0,$$

für den geschlossenen:

$$(2) \quad A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = Gm\gamma.$$

1) Maxwell, Electricity and Magnetism 2. p. 363. Formel (17). 1873.

2) Dies war meine Ansicht 1882. l. c. p. 783. Anm.

3) l. c. p. 782.

Die Stromstärke  $\gamma$  ist ohne Rücksicht auf die Selbstinduction bestimmt durch:

$$(3) \quad R\gamma + Gm \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

welche Gleichung, mit (2) combinirt, auf:

$$(4) \quad R \left[ A \frac{d^2\varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi \right] + G^2 m^2 \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

führt.

Soll andererseits die Selbstinduction in Rechnung gezogen werden, so ist:

$$(5) \quad L \frac{d\gamma}{dt} + R\gamma + Gm \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

und nach Elimination von  $\gamma$  aus (2) und (5) in symbolischer Bezeichnung:

$$(6) \quad \left[ R + L \frac{d}{dt} \right] \left[ A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + C \right] \varphi + G^2 m^2 \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Die particulären Lösungen von (1) sind bekanntlich von der Form:

$$(7) \quad \varphi = e^{-(\alpha_0 + i\omega_0)t},$$

und nach Einsetzen in (1) folgt:

$$(8) \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{B}{A},$$

$$(9) \quad \omega_0^2 + \alpha_0^2 = \frac{C}{A}.$$

Bedeutet ferner  $T_0$  und  $\lambda_0$  Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement bei geöffnetem Multiplicator, so ist:

$$(10) \quad \alpha_0 = \frac{\lambda_0}{T_0}, \quad (11) \quad \omega_0 = \frac{\pi}{T_0}.$$

Ebenso ergibt sich durch Einführung von:

$$(12) \quad \varphi = e^{-(\alpha' + i\omega')t}$$

in die Gleichung (4):

$$(13) \quad \alpha' = \frac{1}{2A} \left( B + \frac{G^2 m^2}{R} \right) = \alpha_0 + \frac{G^2 m^2}{2AR},$$

$$(14) \quad \omega'^2 + \alpha'^2 = \frac{C}{A} = \omega_0^2 + \alpha_0^2.$$

Nenne ich weiter  $T'$  und  $\lambda'$  diejenigen Werthe der Schwingungsdauer und des logarithmischen Decrementes, welche bei geschlossenem Multiplicator stattfinden wür-



den, wenn derselbe frei von Selbstinduction wäre, so gelten die Relationen:

$$(15) \quad \alpha' = \frac{\lambda'}{T}, \quad (16) \quad \omega' = \frac{\pi}{T},$$

und es folgt aus (14) und (13):

$$(17) \quad \frac{\pi^2 + \lambda'^2}{T'^2} = \frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{T_0^2},$$

$$(17') \quad \alpha' = \frac{\lambda'}{T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda'^2}},$$

$$(18) \quad G^2 m^2 = 2AR[\alpha' - \alpha_0] = \frac{2AR}{T_0} \left[ \lambda' \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda'^2}} - \lambda_0 \right].$$

Diese allgemein bekannten Formeln musste ich noch einmal hersetzen, um die weiteren Entwicklungen daran anschliessen zu können.

Meinem Verfahren zur Berücksichtigung der Selbstinduction liegt der einfache Gedanke zu Grunde,  $\lambda'$  durch das thatsächlich beobachtete log. Decr.  $\lambda$  auszudrücken und diesen Werth in (18) einzuführen. Um die Gleichung (6), in welcher der Extrastrom berücksichtigt ist, zu integrieren, setze ich:

$$(19) \quad \varphi = e^{-\rho t}$$

und erhalte für  $\rho$  die cubische Gleichung:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^3 - 2\alpha_0 \rho + \alpha_0^2 + \omega_0^2 - \frac{G^2 m^2}{RA} \rho \\ + \eta [-\rho^3 + 2\alpha_0 \rho^2 - (\alpha_0^2 + \omega_0^2) \rho] = 0, \end{array} \right.$$

worin die Coëfficienten mit Hülfe von (8) und (9) ausgedrückt sind, und der Kürze wegen:

$$(21) \quad \eta = \frac{L}{R}$$

geschrieben ist.

Die Gleichung (20) besitzt selbstverständlich (für den Fall des von mir benutzten Multipliers habe ich mich durch Ausrechnung davon überzeugt) eine reelle positive und zwei conjugirte complexe Wurzeln, die ich mit  $\rho_1$ ,  $\alpha + i\omega$ ,  $\alpha - i\omega$  bezeichnen will, daher ist das allgemeine Integral der Gleichung (6):

$$(22) \quad \varphi = M e^{-(\alpha + i\omega)t} + N e^{-(\alpha - i\omega)t} + P e^{-\rho t},$$

worin die Constanten  $M$ ,  $N$ ,  $P$  aus dem Anfangszustande zu bestimmen sind. Es sind nun die Wurzeln von (20) zu untersuchen.

Bis auf Grössen höherer Ordnung ist zunächst:

$$(23) \quad \varrho_1 = \frac{1}{\eta}.$$

Für  $\eta = 0$  verwandelt sich nämlich die Gleichung (20) in eine quadratische, d. h. eine Wurzel von (20) wird  $= \infty$ , bei kleinen  $\eta$  — und um solche handelt es sich ja nur — wird also  $\varrho_1$  sehr gross sein, und mit alleiniger Beibehaltung der höchsten Potenzen von  $\varrho_1$  reducirt sich (20) auf:

$$\varrho_1^3 - \eta \varrho_1^3 = 0,$$

woraus sofort (23) folgt.<sup>1)</sup>

Die beiden anderen Wurzeln  $\alpha \pm i\omega$  werden sich von den für abwesende Selbstinduction geltenden  $\alpha' \pm i\omega'$  nur um Grössen der Ordnung  $\eta$  unterscheiden.

Um die Differenz zu ermitteln, denke ich mir in (20)  $\eta$  um einen Zuwachs  $\Delta\eta$  vermehrt und erhalte für den entsprechenden Zuwachs von  $\varrho$ :

$$\Delta\varrho \left[ 2\varrho - 2\alpha_0 - \frac{G^2 m^2}{RA} + \eta (-3\varrho^2 + 4\alpha_0 \varrho - (\alpha_0^3 + \omega_0^3)) \right] + \Delta\eta [-\varrho^3 + 2\alpha_0 \varrho^2 - (\alpha_0^3 + \omega_0^3)\varrho] = 0.$$

Wende ich diese Formel auf den Ausgangswerth  $\eta = 0$  an, welchem  $\varrho'$  entsprechen möge (es ist  $\varrho' = \alpha' \pm i\omega'$ ), und schreibe  $\eta$  an Stelle von  $\Delta\eta$ , so kommt:

$$\Delta\varrho = \frac{\eta \varrho'^2 \frac{G^2 m^2}{RA}}{2 \left[ \varrho' - \alpha_0 - \frac{G^2 m^2}{2RA} \right]} = \frac{\eta \varrho'^2 \frac{G^2 m^2}{RA}}{2 \left[ \varrho' - \alpha_0 - \frac{G^2 m^2}{2RA} \right]},$$

oder mit Rücksicht auf (18):

$$(24) \quad \Delta\varrho = \frac{\eta \varrho'^2 (\alpha' - \alpha_0)}{\varrho' - \alpha'}.$$

Hierin ist  $\varrho' = \alpha' \pm i\omega'$ ; wird dem entsprechend  $\Delta\varrho = \Delta\alpha \pm i\Delta\omega$  gesetzt, so ergibt sich endlich durch Sonderung des Reellen und Imaginären:

1) Das durch genaue Auflösung von (20) erhaltene  $\varrho_1$  unterschied sich von  $1/\eta$  bei dem Breslauer Multiplikator noch nicht um 1 Procent.

$$(25) \quad \Delta \alpha = \eta (\alpha' - \alpha_0) 2\alpha', \quad \Delta \omega = -\eta (\alpha' - \alpha_0) \frac{(\alpha'^2 - \omega'^2)}{\omega}.$$

Den folgenden Betrachtungen werde der specielle Fall zu Grunde gelegt, dass der Magnet aus der abgelenkten Stellung ohne Anfangsgeschwindigkeit, und ohne dass ein Strom im Multiplicator circulirt, seine Bewegung beginnt und dann sich selbst überlassen bleibt. Es ist daher für  $t = 0$  zu setzen:

$$(26) \quad \varphi = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \gamma = 0.$$

Die allgemeine Lösung (22) der Differentialgleichung (6) schreibe ich in reeller Form:

$$(27) \quad \varphi = e^{-\alpha t} [c \cos \omega t + s \sin \omega t] + P e^{-\alpha_0 t},$$

und erhalte aus (26) unter Hinzuziehung von (2):

$$(28) \quad c + P = \varphi_0,$$

$$(29) \quad -\alpha c + \omega s - P \rho_1 = 0,$$

$$(30) \quad \begin{cases} c[\alpha^2 - \omega^2] - s 2\alpha\omega + P[\rho_1^2 - 2\alpha_0 \rho_1 + \alpha_0^2 + \omega_0^2] \\ + (\alpha_0^2 + \omega_0^2) \varphi_0 = 0. \end{cases}$$

Die Elimination von  $s$  und  $c$  aus (30) mit Hilfe von (28) und (29) gibt:

$$(31) \quad \begin{cases} P[\rho_1^2 - 2\rho_1(\alpha + \alpha_0) + \alpha^2 + \omega^2 + \alpha_0^2 + \omega_0^2] \\ + \varphi_0[\alpha_0^2 + \omega_0^2 - \alpha^2 - \omega^2] = 0. \end{cases}$$

Da nach (14)  $\alpha_0^2 + \omega_0^2 - \alpha^2 - \omega^2 = 0$  ist, wird der Coefficient von  $\varphi_0$  in (31) der Ordnung  $\eta$ , während wegen  $\rho_1 = 1/\eta$  der Coefficient von  $P$  der Ordnung  $\eta^{-2}$  ist. Hieraus geht hervor, dass die Constante  $P$  der dritten Ordnung in  $\eta$  wird, woher die Terme mit  $P$  in allen Formeln, welche nur  $\varphi$  und  $d\varphi/dt$  enthalten, fortgelassen werden können. In der Formel für die Stromstärke tritt wegen  $P$  ein Glied der Ordnung  $\eta$  auf, wie leicht aus (2) erhellt.

Nach (28) wird  $c = \varphi_0$  (richtig bis auf  $\eta^2$  incl.), nach (29)  $s = (\alpha \varphi_0 / \omega)$  (richtig bis auf  $\eta$  incl.), also aus (27):

$$(32) \quad \varphi = \varphi_0 e^{-\alpha t} \left[ \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right],$$

ferner:

$$(33) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} \sin \omega t,$$

und zwar sind in den beiden letzten Gleichungen nur Glieder mit  $\eta^3$  vernachlässigt.

Aus (33) folgt die wirkliche Schwingungsdauer (Zeit zwischen zwei successiven Umkehrpunkten):

$$(34) \quad T = \frac{\pi}{\omega}, \quad \text{also } \omega = \frac{\pi}{T}$$

und nach (32) wird die Elongation für  $t = T$ :

$$\varphi_1 = -\varphi_0 e^{-\pi T},$$

sodass das thatsächlich beobachtete logarithmische Decrement ist:

$$(35) \quad \lambda = \alpha T, \quad \text{woher } \alpha = \frac{\lambda}{T}.$$

Es sei nun daran erinnert, dass  $\alpha'$ ,  $\omega'$ ,  $T'$ ,  $\lambda'$  sich auf den Fall fehlender Selbstinduction bezogen, während bei Vorhandensein derselben  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $T$ ,  $\lambda$  gelten. Es werde gesetzt:

$$\alpha = \alpha' + \Delta\alpha, \quad \omega = \omega' + \Delta\omega, \quad \lambda = \lambda' + \Delta\lambda, \quad T = T' + \Delta T,$$

so sind  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\omega$  bereits durch (25) gegeben, ferner wird nach (34) und (35):

$$\frac{\Delta T}{T'} = -\frac{\Delta\omega}{\omega'}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda'} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha'} + \frac{\Delta T}{T'} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha'} - \frac{\Delta\omega}{\omega'}$$

und mit Einführung der Werthe von  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\omega$ :

$$(36) \quad \Delta\lambda = \lambda' \eta (\alpha' - \alpha_0) \frac{(\alpha'^2 + \omega'^2)}{\omega'^3} = \lambda' \eta (\alpha' - \alpha_0) \frac{(\pi^2 + \lambda'^2)}{\pi^3}.$$

Um zum Schlusse zu gelangen, erübrigt nur, in der Formel (18)  $\lambda'$  durch  $\lambda - \Delta\lambda$  zu ersetzen. Hierdurch ergibt sich zunächst:

$$(37) \quad \frac{G^2 m^2}{R A} = \frac{2}{T_0} \left[ \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 - \eta (\alpha' - \alpha_0) \lambda' \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda'^2}} \right].$$

Eigentlich ist (vgl. 18):

$$\alpha' - \alpha_0 = \frac{1}{T_0} \left\{ \lambda' \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda'^2}} - \lambda_0 \right\},$$

da aber der letzte Term von (37) schon den Factor  $\eta$  besitzt, kann darin für  $\lambda'$  auch  $\lambda$  geschrieben werden, und nun folgt, indem noch für  $\eta$ ,  $L/R$  zurückgesetzt wird:

$$(38) \quad G^2 m^2 = \frac{2 R A}{T_0} \left[ \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right] \left[ 1 - \frac{L}{R} \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} \right].$$

Diese Formel ist aber identisch mit (39) meiner früheren Abhandlung.<sup>1)</sup>

Unter den oben angenommenen Anfangsbedingungen erschien  $e^{-\alpha t}$  in dem Ausdrucke der Ablenkung  $q$  mit einem Factor  $P$  der Ordnung  $\eta^3$  multiplicirt.

Im allgemeinen liefert die Einführung von (22) in (2):

$$\frac{Gm}{A} \gamma = P[\varrho_1^3 - 2\alpha_0 \varrho_1 + \alpha_0^3 + \omega_0^2] + \dots;$$

sehe ich also von solchen Fällen ab, wo im Augenblicke  $t = 0$  ein ausserordentlich starker Strom, wie er in praxi kaum vorkommen dürfte, durch den Multiplicator gesandt wird, so wird  $P$  der Ordnung  $1/\varrho_1^3$ , d. h.  $\eta^3$ .

Bei einer Untersuchung, welche nur erste Potenzen von  $\eta$  berücksichtigt, wird daher in dem Ausdrucke (22) für  $q$  der letzte Term fortgelassen werden können. In  $dq/dt$  und  $\gamma$  wird dies aber im allgemeinen nicht mehr gestattet sein, vielmehr wird ein Glied erster, resp. nullter Ordnung in  $\eta$  von  $Pe^{-\alpha t}$  resultiren. Diese Bemerkung ist besonders für die Bestimmung der Constanten aus den Anfangsbedingungen wichtig, denn  $e^{-\alpha t}$  wird im Verlauf der Bewegung sehr bald unmerklich klein.

Ich will nun auf die Maxwell'sche Behandlung des Problemcs eingehen. Maxwell setzt von vornherein<sup>2)</sup>:

$$q = Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta);$$

nach den eben gemachten Auseinandersetzungen ist dies für  $q$  erlaubt, führt aber im allgemeinen in  $dq/dt$  einen Fehler der Ordnung  $\eta$ , in der Stromstärke  $\gamma$  einen endlichen Fehler herbei.<sup>3)</sup> Für die von mir gewählten Anfangsbedingungen ist die Maxwell'sche Annahme statthaft, wenn darauf verzichtet wird,  $\gamma$  bis  $\eta$  incl. richtig zu erhalten.

Das logarithmische Decrement  $\lambda$  und auch die Schwingungsdauer  $T$  nimmt Maxwell als direct beobachtet an und hat entsprechend den Gleichungen (34):

$$\omega = \frac{\pi}{T}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{T}.$$

1) l. c. p. 783.

2) l. c. p. 361, Formel (3).

3) resp. es wird unmöglich, den Anfangsbedingungen zu genügen.

In seiner Differentialgleichung (10) (Gl. (6) dieser Abhandlung) schreibt er  $d/dt = -(\alpha + i\omega)$ , d. h. er führt die Partiallösung  $q = e^{-(\alpha + i\omega)t}$  ein und erhält dadurch seine Gleichung (13), welche mit meiner Gleichung (20) übereinkommt, wenn in letzterer  $\rho$  durch  $\alpha + i\omega$  ersetzt wird.

Durch Spaltung in den imaginären und reellen Theil zerfällt die Gleichung in zwei, welche nach  $R$  aufgelöst ergeben:

$$(39) \quad R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + \frac{L}{2} \left\{ 3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0} \right\}^1,$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{G^2 m^2 \alpha}{A[\alpha^3 - \omega^3 + \alpha_0^3 + \omega_0^3 - 2\alpha\alpha_0]} \\ &+ L \frac{\alpha^3 - 3\alpha\omega^2 - 2\alpha_0(\alpha^2 - \omega^2) + \alpha(\alpha_0^2 + \omega_0^2)}{\alpha^3 - \omega^3 + \alpha_0^3 + \omega_0^3 - 2\alpha\alpha_0}, \end{aligned} \right.$$

woraus durch Gleichsetzung der rechten Seiten:

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} &G^2 m^2 [\alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2] \\ &= LA[(\alpha - \alpha_0)^4 + 2(\alpha - \alpha_0)^2(\omega^2 + \omega_0^2) + (\omega^2 - \omega_0^2)^2]. \end{aligned} \right.$$

Maxwell bezeichnet consequenter Weise diese Gleichung als „testing equation“, denn da er  $\alpha_0, \omega_0, \alpha, \omega$  durch Beobachtung gegeben,  $G, m, L, A$  als anderweitig ermittelt annimmt, so kann ihm diese Gleichung nur dazu dienen, die Genauigkeit seiner Beobachtungen zu prüfen.

Bis soweit besteht über die Auffassung Maxwell's kein Zweifel.

Jetzt lässt er eine Näherung eintreten, indem er in (41) die rechte Seite vernachlässigt. Daraus folgt:

$$(42) \quad \alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2 = 0.$$

Hiermit geht Maxwell in die rechte Seite von (39) hinein und erhält<sup>2)</sup>:

$$(43) \quad R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + 2L\alpha.$$

Da er aber den aus (42) gewonnenen Näherungswerth von  $\alpha$  nicht durch eine besondere Bezeichnung unterscheidet, so bleibt ungewiss, ob im ersten Gliede rechts von (43)  $\alpha$  den Näherungswerth oder den strengen Werth bedeuten soll.

1) l. c. p. 363, Formel (14).

2) l. c. p. 363, Formel (17).

Im ersteren Falle wäre die Formel (43) augenscheinlich nicht richtig, denn da der Näherungswerth von  $\alpha$  sich von dem strengen um eine Grösse der Ordnung  $L$  unterscheidet, so wäre ein Glied der Ordnung  $L$  unberücksichtigt geblieben, welches wegen des Nenners im ersten Term von (39) rechts auftritt.

Im anderen Falle wäre die Formel zwar richtig, aber praktisch unbrauchbar. Um dieselbe anwenden zu können, müsste nämlich  $\alpha$  nach  $\lambda/T$  direct aus den Beobachtungen bestimmt sein, während bekanntlich schon bei einer mässigen Dämpfung eine Ermittlung der Schwingungsdauer  $T$  bei geschlossenem Multiplikator nicht mit genügender Schärfe ausführbar ist.

Seit W. Weber umgeht man diese Schwierigkeit, indem man  $T$  durch die gut beobachtbaren Grössen  $\lambda$ ,  $\lambda_0$ ,  $T_0$  (Schwingungsdauer bei offenem Multiplikator) ausdrückt. Unter Vernachlässigung der Selbstinduction geschieht dies nach Formel (17), was aber an Stelle derselben tritt, wenn die Selbstinduction berücksichtigt werden soll, bleibt erst zu untersuchen.

Hiermit ist gezeigt, dass die Behandlung des Problemes durch Maxwell nicht zu einem verwerthbaren Endresultate geführt hat.

Indessen lässt sich durch eine von mir schon früher kurz angedeutete Modification des Maxwell'schen Grundgedankens leicht zum Ziele gelangen.

Ich betrachte als gegeben die scharf messbaren Grössen  $\lambda$ ,  $\lambda_0$ ,  $T_0$ , während die Schwingungsdauer bei geschlossenem Multiplikator,  $T$  zunächst unbekannt ist und erst im Laufe der Untersuchung gefunden werden soll. Ebenso wie oben setze ich:

$$(44) \quad \alpha_0 = \frac{\lambda_0}{T_0}, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{T_0}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{T}, \quad \omega = \frac{\pi}{T},$$

und erhalte durch dieselben Rechenoperationen die Gleichungen (39), (40), (41).

Die Gleichung (41) gewinnt aber eine ganz andere Bedeutung, wie bei Maxwell; sie ist als Bestimmungs-



gleichung für  $T$  aufzufassen<sup>1)</sup>, welches nach Benutzung der Relationen (44) darin einzig unbekannt bleibt.

Es wäre nun aus (41)  $T$  zu entnehmen, mit Hilfe desselben nach (44)  $\alpha$  und  $\omega$  zu berechnen, und hiermit in (39) hineinzugehen.

Bequemer ist folgendes Näherungsverfahren.

Es sei  $T_1$  derjenige Werth von  $T$ , welcher aus (41) unter Vernachlässigung von  $L$  folgt, und  $\alpha_1, \omega_1$  die zugehörigen Werthe von  $\alpha$  und  $\omega$ , so ist nach (41):

$$(45) \quad \alpha_1^2 + \omega_1^2 = \alpha_0^2 + \omega_0^2.$$

Wird gesetzt:

$$(46) \quad T = T_1 + \delta T, \quad \alpha = \alpha_1 + \delta \alpha, \quad \omega = \omega_1 + \delta \omega,$$

so folgt aus (44) mit Rücksicht darauf, dass  $\lambda$  hier eine gegebene Grösse ist:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \omega &= -\frac{\pi}{T_1^2} \delta T = -\frac{\omega_1}{T_1} \delta T, & \delta \alpha &= -\frac{\lambda}{T_1^2} \delta T = -\frac{\alpha_1}{T_1} \delta T, \\ \delta \omega &= \frac{\omega_1}{\alpha_1} \delta \alpha. \end{aligned} \right.$$

Da die rechte Seite von (41) schon den Factor  $L$  hat, so kann darin statt  $\alpha$  und  $\omega$  einfach  $\alpha_1$  und  $\omega_1$  geschrieben werden, links sind dafür  $\alpha_1 + \delta \alpha$ , resp.  $\omega_1 + \delta \omega$  einzusetzen, und mit Hinzuziehung von (47) ergibt sich nach leichten Reductionen:

$$(48) \quad \delta \alpha = \frac{2LA}{G^2 m^3} \alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_0)^2.$$

Die Formel (39), ähnlich unter Fortlassung von  $L^2$  entwickelt, liefert:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{G^2 m^3}{2A(\alpha_1 - \alpha_0)} - \frac{G^2 m^3}{2A(\alpha_1 - \alpha_0)^2} \delta \alpha + 2L\alpha_1 \\ &= \frac{G^2 m^3}{2A(\alpha_1 - \alpha_0)} - L\alpha_1 + 2L\alpha_1 = \frac{G^2 m^3}{2A(\alpha_1 - \alpha_0)} + L\alpha_1. \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber nach (45):

$$(50) \quad \frac{\pi^2 + \lambda^2}{T_1^2} = \frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{T_0^2}, \quad T_1 = T_0 \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda^2}{\pi^2 + \lambda_0^2}},$$

also:

$$(51) \quad \alpha_1 = \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}},$$

1) S. meine frühere Abb. I. c. p. 782.

und endlich nach Einsetzen in (49):

$$G^2 m^2 = \frac{2RA}{T_0} \left[ \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right] \left[ 1 - \frac{L}{R} \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} \right].$$

Dies ist aber wieder meine alte Formel (38).

Es könnte im ersten Augenblicke befremden, dass die hier erhaltenen Correctionsgrössen  $\delta\alpha$  und  $\delta\omega$  nicht mit den in (25) definirten  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\omega$  identisch sind. Der scheinbare Widerspruch löst sich aber durch die Ueberlegung, dass das Näherungsverfahren in beiden Ableitungen ein ganz verschiedenes ist. Infolge dessen differiren die ersten Näherungswerthe  $\alpha'$ ,  $\omega'$  einerseits und  $\alpha_1$ ,  $\omega_1$  andererseits um Grössen erster Ordnung in  $L$ , ebenso demgemäss auch die Zusatzterme zur Correction auf  $\alpha$  und  $\omega$ . Man vergleiche die Definitionen von  $T'$  und  $T_1$  ((17) und (50)), aus denen sofort der Unterschied von  $\omega' = \pi/T'$  und  $\omega_1 = \pi/T_1$  hervorgeht, ferner (17) mit (51). Der innere Grund dieses Verhaltens liegt darin, dass bei der zweiten Behandlung für  $\lambda$  sofort der beobachtete Werth eingeführt und festgehalten wird, während bei der ersten zunächst  $\lambda'$  auftritt, welches ohne Selbstinduction gelten würde.

Darmstadt, den 9. April 1884.

## XII. Zwei verschiedene Formen eines selbstthätigen Disjunctors; von F. Himstedt.

(Aus den Ber. der Naturforsch. Ges. zu Freiburg i. Br. Bd. 8, Heft 2, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Bei Gelegenheit einer Arbeit, mit welcher ich noch beschäftigt bin, bedurfte ich eines Disjunctors, der den folgenden Anforderungen genüge. Derselbe sollte 1) längere Zeit unverändert fortarbeiten, 2) eine genaue Zählung der Unterbrechungen per Secunde gestatten und vor allem 3) einen stets sicheren Contact bei gleichem Leitungswiderstande herstellen.

Der nächstliegende Gedanke war, einen Disjunctor von

Dove'scher Construction oder auch mit Quecksilbercontacten mittelst eines Uhrwerkes in Rotation zu versetzen. Von den mir zu Gebote stehenden Uhrwerken besass jedoch keines die verlangte Genauigkeit, nämlich eine bis auf mindestens  $\frac{1}{10}\%$  gleichmässige Geschwindigkeit. Ich habe später einen Rotationsapparat mit der gewünschten Gleichmässigkeit gefunden, will aber, bevor ich von demselben rede, eine andere Anordnung eines Disjunctors beschreiben.

I. Wenn man in bekannter Weise zwei electromagnetische Stimmgabeln durch denselben galvanischen Strom zu treiben sucht, wobei also dieser durch die Unterbrechungs- vorrichtung an der ersten Stimmgabel Nr. I intermittirend gemacht, die Electromagnete beider Stimmgabeln Nr. I und Nr. II in derselben Weise umfließt, so findet man bekanntlich, dass Nr. II nur dann mitschwingt, wenn ihr Eigenton von der von Nr. I um nicht mehr als höchstens  $\pm 4$  Schwingungen per Secunde abweicht. Des weiteren ist bekannt, dass trotz jener möglichen Verschiedenheit in den Eigentönen bei der erwähnten Anordnung Nr. II doch stets die gleiche Anzahl von Schwingungen macht wie Nr. I, in ihrer Bewegung aber gegen diese einen Phasenunterschied zeigt. Besitzt Nr. II den höheren Eigenton, so eilt sie voran, ist sie tiefer, so bleibt sie hinter Nr. I in der Phase zurück. Der Phasenunterschied kann bis zu einer halben Schwingung betragen.

Es ist nun wohl ohne weiteres klar, wie man diese bekannte Erscheinung verwerthen kann, um zwei Stimmgabeln als Disjunctur zu benutzen. Nr. I trägt ausser der Contact- vorrichtung, durch welche der beide Stimmgabeln treibende Strom intermittirend gemacht wird, eine zweite, von jener isolirte Contactvorrichtung, durch die der inducirende Strom unterbrochen und geschlossen wird. Nr. II erhält eine Contactvorrichtung, welche in den inducirten Stromkreis eingeschaltet ist, und je nachdem man mit Schliessungs- oder Oeffnungsinductionströmen arbeiten will, verschiebt man ein Laufgewicht so, dass der Eigenton von Nr. II höher oder tiefer ist als der von Nr. I.

Will man quantitative Messungen machen und sich über-

zeugen, dass der inducirte Strom während des Contactes von Nr. II zu voller Ausbildung gelangt, so verschiebt man zunächst das Laufgewicht auf Nr. I so weit, dass bei weiterer Verschiebung Nr. II nicht mehr mitschwingen würde. Sind die Contacte bei beiden Stimmgabeln so gestellt, dass sie in der Ruhelage nur ganz leicht berühren, so wird, wenn bei der Bewegung Nr. II in der Phase voraneilt, Nr. I seinen Contact beginnen, wenn bei Nr. II schon die Hälfte der Contactdauer verflossen ist. Man erhält die Schliessungsinductionsströme, die, durch ein passendes Galvanometer geschickt, eine constante Ablenkung ergeben werden. Verschiebt man jetzt das Laufgewicht so, dass dadurch der Eigenton von Nr. II tiefer wird, so vergrössert man dadurch die Dauer des gleichzeitigen Contactes von Nr. I und Nr. II, der Inductionsstrom hat mithin jetzt mehr Zeit zu seiner vollen Ausbildung, und man beurtheilt an dem unverändert gebliebenen oder grösser gewordenen Galvanometeraussschlage, ob der inducirte Strom schon zur vollen Ausbildung gekommen war oder nicht. Um zu beurtheilen, ob der inducirende Strom Zeit gefunden hat, zu voller Stärke anzuwachsen, vergrössert man bei dem Contacte an Nr. I die Contactdauer mehr und mehr und beobachtet wieder jedes mal die Ablenkung des Galvanometers durch die Inductionsströme.

Alle diese Manipulationen lassen sich sehr schnell ausführen, und arbeitet der Disjuncter dann mit grosser Zuverlässigkeit unbeschränkte Zeit hindurch, solange man für rein gehaltene Quecksilbercontacte sorgt. Dass Platincontacte nicht immer gleiche Berührung mit gleichem Widerstande geben, ist, glaube ich, allgemein anerkannt; die besten Resultate habe ich mit Bürsten aus feinem Platindraht gegen Platinblech erhalten, doch waren Stromschwankungen von etwa  $\frac{1}{2}\%$  der Gesamtintensität nie zu beseitigen. Für den die Stimmgabeln treibenden Strom sind solche Schwankungen ohne Belang, selbst wenn dieselben  $5\%$ , ja noch mehr betragen, habe ich nicht die leiseste Störung in dem Gange der Stimmgabel constatiren können. Als beste Contacte, die einzigen, mit denen ich mehrere Stunden hintereinander vollkommen constante Ablenkungen erhalten habe,

möchte ich Nähnadeln mit verkupfelter und amalgamirter Spitze in Quecksilber empfehlen. Bei längerem Gebrauche empfiehlt sich die Anwendung der bekannten Spülcontacte (darüberfließender Alkohol, eventuell Wasser) oder ein darüber streichender Strom von Wasserstoff oder Stickstoff. Kohlensäure schmutzt bei stärkeren Strömen, vielleicht infolge von Zersetzung. Um jede Aenderung des Quecksilberniveaus zu vermeiden, habe ich das Quecksilbergefass mit einem sehr weiten Gefäss voll Oel communiciren lassen.

Die vorstehend beschriebene Anordnung eines Disjunctors hat nur eine Unbequemlichkeit, der Apparat ist ausserordentlich empfindlich gegen Erschütterungen. Trotzdem ich die Stimmgabeln an eine Steinplatte angeschraubt hatte, die in eine ca. 1 m dicke Wand eingegypst war, machte sich doch jede Erschütterung durch kleine Stromschwankungen bemerkbar, und wenn es sich um äusserste Genauigkeit handelte, konnte ich nur zur Nachtzeit damit beobachten.

II. Einen allen Anforderungen für quantitative Messungen genügenden Disjuncter, der mit vollkommener Sicherheit arbeitet und ausserdem sehr bequem zu handhaben ist, habe ich unter Benutzung des phonischen Rades von Paul la Cour<sup>1)</sup> erhalten. Ich kann das phonische Rad für alle die Fälle, in denen es sich bei geringer Arbeitsleistung um eine sehr gleichmässige Bewegung handelt, wegen seiner einfachen und sicheren Handhabung sehr empfehlen. Für die Construction möchte ich als besonders wichtig hervorheben, dass die Axe gar nicht wackeln darf, das Rad sehr gut centrirt sein muss, und die Zähne desselben sehr nahe an den Polen des Electromagnets vorbeigehen müssen. Man vermeidet hierdurch die starken Ströme beim Treiben, und erleichtert dies sowohl das Ingangsetzen als auch die dauernde Bewegung sehr. Ich treibe ein phonisches Rad, dessen Eisenscheibe einen Durchmesser von 10 cm, eine Dicke von 0,3 cm hat und im ganzen mit der Quecksilbercapsel ein Gewicht von 0,95 kg mit einem einzigen Bunsen von 12 cm Höhe.

1) Paul la Cour, Beibl. 2. p. 584. 1878; und Paul la Cour, das phonische Rad, deutsch v. J. Kareis, Leipzig 1880.

Ferner ist es gut, wenn das Quecksilber in der Capsel in mehrere Rinnen vertheilt ist und an Masse mindestens der ganzen übrigen Masse des Rades gleichkommt. Man hat dann nur nöthig, dem Rade eine Rotationsgeschwindigkeit zu ertheilen, die grösser ist als die durch die Schwingungszahl der Stimmgabel bedingte, und das Rad geht ganz von selbst in die gleichförmige Bewegung über. Ich bin Hrn. Paul la Cour für freundliche Uebersendung eines Rades zu Dank verpflichtet, um so mehr, als ich bei den selbst verfertigten Rädern die erwähnten Punkte nicht genügend beachtet hatte, und es mir deshalb jedes mal nur mit Mühe und nach längerem Probiren gelang, das Rad in gleichmässige Rotation zu versetzen.

Der eigentliche Disjunctor besteht aus einer an der verticalen Rotationsaxe centrisch befestigten horizontalen Scheibe, an welcher vier vertical nach unten stehende Schneiden befestigt sind, die gegen einander innerhalb enger Grenzen mittelst Schrauben verstellt werden können. Dieselben sind amalgamirt, und tauchen zwei derselben bei der Rotation dauernd je in eine Quecksilberrinne, zwei schlagen durch Quecksilberkuppen. Zu dem Zwecke sind in einem mittelst Stellschrauben horizontal gestellten Brette vier Rinnen eingedreht von 3 mm Breite, 5 mm Tiefe und den Halbmessern von 3 cm, 4 cm, 10 cm und 11 cm, die beiden ersteren sind ganz mit Quecksilber gefüllt, die beiden letzteren sind je nach Bedarf in mehr oder weniger gleiche Segmente getheilt, die ungeraden Nummern derselben mit Paraffin ausgegossen, die geraden mit Quecksilber so angefüllt, dass die Kuppen über die Ränder emporragen. Die Verbindung der einzelnen Theile in den Stromkreisen bedarf keiner weiteren Beschreibung. Dadurch, dass die Rinnen so schmal genommen werden, erreicht man, dass die durchschlagenden Schneiden nur äusserst wenig Quecksilber verspritzen. Ich hatte anfangs alle Quecksilberabtheilungen eines Ringes mit einem grossen Reservoir communiciren lassen, um gleiches Niveau zu sichern, doch hat sich diese Vorsichtsmaassregel als unnöthig erwiesen. Ich habe den Disjunctor volle vier Stunden arbeiten lassen bei einer Stromstärke von ca. 0.2 Ampère, ohne die geringste



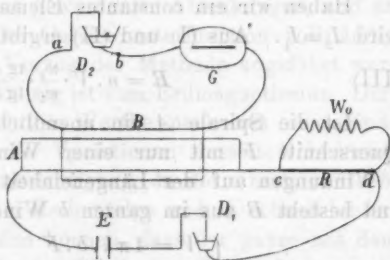
Störung zu beobachten. Dass man nicht mehr als zwei bis drei Umdrehungen per Secunde nehmen wird, leuchtet von selbst ein, will man die Zahl der Unterbrechungen vergrössern, so vergrössert man praktischer die Anzahl der Quecksilberkuppen.

Freiburg i. Br. Physik. Inst.

### XIII. Ueber eine Methode zur Bestimmung des Ohm; von F. Himstedt.

(Aus den Ber. der Naturforsch. Ges. zu Freiburg i. Br. Bd. 8, Heft 2, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

I. Die Methode ist die von Kirchhoff. Es seien gegeben zwei galvanische Spiralen  $A$  und  $B$ .  $A$  sei mit einer Stromquelle  $E$ , einem Stromunterbrecher  $D_1$  und zwei parallel geschalteten Widerständen  $R$  und  $W_0$ , von denen  $R$  der in absolutem Maasse zu messende ist, zu dem primären Stromkreise verbunden.  $B$  mit einem Galvanometer  $G$  und einem zweiten Stromunterbrecher  $D_2$  bilde den inducirten Kreis. Die beiden Stromunterbrecher bilden zusammen einen Disjunctur, welcher gestattet, entweder die Schliessungs- oder die Oeffnungsinductionsströme allein auf das Galvanometer wirken zu lassen.



Wird der primäre Strom  $n$ -mal in der Secunde unterbrochen und wieder geschlossen, so gehen bei Einschaltung des Disjunctors  $n$  Inductionsströme durch das Galvanometer und üben auf die Nadel dieses, wenn ihre Schwingungsdauer gross genug ist, in ihrer Gesamtheit dieselbe Wirkung aus, wie ein constanter Strom von der Intensität:



$$i_1 = \frac{n \cdot V \cdot I_1}{w_1}.$$

Hierin bezeichnet  $V$  das Potential der Spiralen aufeinander,  $I_1$  die Intensität des primären Stromes,  $w_1$  den Widerstand des inducirten Stromkreises. Sei infolge dieser Ströme die Galvanometernadel um den Winkel  $\alpha_1$  abgelenkt und der Reductionsfactor des Galvanometers  $G$ , so haben wir die Gleichung:

$$(I) \quad i_1 = \frac{n \cdot V \cdot I_1}{w_1} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Es werde jetzt der Disjunctur angehalten, der primäre Stromkreis dauernd geschlossen und der Widerstand  $W_0$  ersetzt durch den der Leitung des zweiten Stromkreises, indem die Enden  $a$  und  $b$  an  $c$  und  $d$  angelegt werden, dann fließt durch das Galvanometer ein Strom:

$$i_2 = \frac{R \cdot I_2}{w_2},$$

wo  $I_2$  die Intensität des Hauptstromes,  $w_2$  gleich  $w_1 + R$  ist. Ist die Galvanometerablenkung jetzt  $\alpha_2$ , so ist:

$$(II) \quad i_2 = \frac{R \cdot I_2}{w_2} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Haben wir ein constantes Element und ist  $W_0 = w_1$ , so wird  $I_2 = I_1$ . Aus (I) und (II) ergibt sich dann:

$$(III) \quad R = n \cdot V \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Ist die Spirale  $A$  ein unendlich langes Solenoid vom Querschnitt  $F$  mit nur einer Windungslage, in welcher  $k$  Windungen auf der Längeneinheit nebeneinander liegen, und besteht  $B$  aus im ganzen  $b$  Windungen, so ist:

$$(III_a) \quad \begin{cases} V = 4\pi k \cdot b \cdot F \\ R = 4\pi k \cdot b \cdot n F \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} \end{cases}$$

Ueber die Bestimmung der Zahlen  $k$  und  $b$  bedarf es keiner weiteren Bemerkung.

Die Bestimmung von  $n$  kommt bei Anwendung des von mir beschriebenen, durch das phonische Rad getriebenen Disjunctors<sup>1)</sup> auf die Ermittlung der Schwingungszahl einer

1) Himstedt, Ber. d. Naturf. Ges. zu Freiburg i. Br. 8. Heft 2. 1884. u. Wied. Ann. 22. p. 276. 1884.

electro-magnetisch getriebenen Stimmgabel hinaus, also auf eine Grösse, die sich ohne Mühe mit der geforderten Genauigkeit ermitteln lässt.

Wenn, wie vorausgesetzt, das Solenoid nur eine Windungslage hat, so lässt sich  $F$  mit derselben Schärfe direct ausmessen, wie die Fläche einer Tangentenbussole.

Das Verhältniss  $\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2$  setzt im allgemeinen die Kenntniss des Scalenabstandes voraus. Wählt man aber von vorn herein alle Grössen so, dass  $\alpha_1$  sehr nahe gleich  $\alpha_2$ , so wird mit genügender Annäherung  $\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = s_1 : s_2$ , wo  $s_1$  und  $s_2$  direct die Ablesungen in Scalentheilen der Fernrohrscala sind.

Als weitere Vortheile der beschriebenen Anordnung sei es mir gestattet, noch die folgenden Punkte hervorzuheben.

Die Summation der inducirten Ströme in ihrer Wirkung auf das Galvanometer ermöglicht es, mit so schwachen Strömen zu arbeiten, dass eine Erwärmung der Widerstände durch den Strom von vorn herein ausgeschlossen ist. Infolge eben derselben Einrichtung beobachtet man am Galvanometer nur die constant gewordenen Ablenkungen, und es fällt die Bestimmung der Galvanometerfunction vollständig weg. Endlich darf als Vorzug der Methode angeführt werden, dass dieselbe unabhängig ist vom Erdmagnetismus. Derselbe fällt seinem absoluten Werthe nach aus dem Endresultate heraus, und die Variationen desselben bedürfen keiner besonderen Berücksichtigung, da die einzelnen Beobachtungen in wechselnder Reihenfolge und so schnell hintereinander angestellt werden können, dass der ganze mit dem Erdmagnetismus arbeitende Theil der Beobachtungen in höchstens 5—10 Minuten beendigt sein kann.

Nachdem ich den vorstehenden Plan zu einer absoluten Widerstandsmessung schon vollständig ausgearbeitet und auch schon die ersten Versuche über die Construction eines die Durchführung der Methode ermöglichenden Disjunctors begonnen hatte, an deren Ausführung ich leider lange Zeit vollständig verhindert war, sind die Protocolle über die Sitzungen der internationalen Conferenz zur Be-

stimmung der electrischen Einheiten in Paris erschienen, und sind in diesen die Einzelheiten auch der vorliegenden Methode fast sämmtlich aufgeführt und besprochen. Insbesondere findet sich in den Annexen zu jenen Protocollen ein Auszug einer Arbeit des Hrn. Roiti<sup>1)</sup>, in welcher eine Methode empfohlen wird, die der oben angegebenen in allen wesentlichen Punkten gleich ist. Hr. Roiti schlägt die Benutzung eines neutralen, in sich zurücklaufenden Solenoids vor. Ich glaube, dass die Herstellung eines solchen von genügender Gleichförmigkeit auf grosse Schwierigkeiten stossen wird, wie solches auch schon in jenen Sitzungsprotocollen sich ausgesprochen findet.

In einem Punkte habe ich gegenüber Hrn. Roiti wohl die Methode wesentlich gefördert, indem ich nämlich einen Disjunctor<sup>2)</sup> angegeben habe, der mit der bei den Messungen erforderlichen Sicherheit und Genauigkeit arbeitet, und ohne den die ganze Methode unausführbar sein würde.

II. Die beschriebene Methode lässt sich bis zu einem gewissen Grade auch ohne den immerhin nicht unbedeutenden Aufwand an Mitteln, den eine absolute Widerstandsmessung erfordert, auf ihre Brauchbarkeit prüfen, im speciellen sich darthun, dass der Disjunctor, auf dessen Anwendung die ganze Methode beruht, den gestellten Anforderungen in jeder Beziehung genügt.

Löst man die Gl. (III) für  $V/R$  auf, so wird:

$$(IV) \quad \frac{V}{R} = \frac{1}{n} \cdot \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \text{Const.}$$

Variirt man die Grössen rechter Hand, unter welchen die Stromintensität mit inbegriffen ist, zwischen möglichst weiten Grenzen und erhält gut übereinstimmende Werthe für  $V/R$ , so spricht dies für die Brauchbarkeit, da ja hierbei ganz dieselben Operationen und Beobachtungen auszuführen

1) Die Arbeit selbst ist schon am 30. April 1882 Atti di Torino erschienen. Vgl. Beibl. 6. p. 815, 1882. Hr. G. Wiedemann hatte die Freundlichkeit, mir später zu einer Einsicht in einen Separatabdruck zu verhelfen.

2) L. c. p. 276.

sind, wie bei der absoluten Widerstandsmessung selbst, mit alleiniger Ausnahme der Bestimmung des Querschnittes des unendlich langen Solenoides, eine Messung, die ich der geforderten Genauigkeit entschieden für fähig erachte.

Ich habe diese Probe wirklich durchgeführt, und zwar in folgender Weise. Zuerst wurde  $w_1/w_2$  bestimmt, dann abwechselnd nach Gl. (II)  $\operatorname{tg} \alpha_2$  und nach Gl. (I)  $\operatorname{tg} \alpha_1$  beobachtet, im ganzen fünf-, resp. viermal, dann wieder  $w_1/w_2$  bestimmt. Während der ganzen Dauer des Versuches schrieb die das phonische Rad und damit den Disjunctor treibende Stimmgabel ihre Schwingungen auf eine rotirende berusste Trommel, auf welche zu Anfang und zu Ende der Beobachtungen von einem Funkeninductorium je drei Funken übersprangen, die betreffenden Secunden markirend.

Die Intensität des Hauptstromes, resp. inducirenden Stromes wurde von etwa 0,001 Ampère bis etwa 0,1 Ampère geändert. Diese Angabe beruht auf roher Schätzung aus electromotorischer Kraft und Widerstand.  $s_1$  ist der Ausschlag in Scalentheilen,  $\operatorname{tg} \alpha_1/\operatorname{tg} \alpha_2$  ist das auf Bogen corrigirte Verhältniss<sup>1)</sup>  $s_1/s_2$ . Die Aenderungen von  $w_1$  und damit die von  $w_2$  sind aus der Tabelle zu ersehen,  $w_1/w_2$  wurde so bestimmt, dass  $w_1$  und  $w_2$  mit demselben  $w_3$  verglichen wurden.

Bei  $n$  sind verhältnissmässig enge Grenzen für ein Variiren gesteckt, denn  $n$  darf nicht zu gross sein, damit die Inductionsströme zu voller Ausbildung gelangen und andererseits nicht zu klein, da sonst die Schwingungsdauer des Galvanometers unbequem gross genommen werden muss. Dasselbe betrug ca. 18 Secunden. Der Magnet war durch Toepler'sche Luftdämpfung stark gedämpft.

Um auch  $R$  ändern zu können, ohne die Vergleichbarkeit der Werthe von  $V/R$  zu gefährden, stellte ich mir einen Widerstand  $R_1 = 1,0027 R$  dar und substituirte dann  $R_1 + R = 2,0027 R$  für  $R$  in der Leitung.

1) Zu dieser Correction genügt ein angenäherter Werth des Scalenabstandes.

$$R = 0,98.$$

	$n$	$w_1$	$\frac{w_1}{w_2}$	$s_1$	$\frac{\lg \alpha_1}{\lg \alpha_2}$	$\frac{V}{R \cdot 10^3}$
1	8,1399	108,13	0,9910	232,10	1,0050	12235
2	8,1399	108,13	0,9910	404,35	1,0053	12239
3	8,1399	481,03	0,9980	181,55	0,9981	12237

$$R_1 + R = 2,0027 \cdot R.$$

	$n$	$w_1$	$\frac{w_1}{w_2}$	$s_1$	$\frac{\lg \alpha_1}{\lg \alpha_2}$	$\frac{V}{R \cdot 10^3}$
1	16,6365	914,85	0,9979	247,63	1,0186	12236
2	16,6365	2240,35	0,9991	379,25	1,0171	12233
3	16,6365	4532,70	0,9996	392,05	1,0169	12237

Ich hoffe, in der nächsten Zeit die Mittel zu erhalten, nach der angegebenen Methode eine Bestimmung des Ohm auszuführen.

Physik. Inst. Freiburg i. B., Februar 1884.

#### XIV. *Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. A. von Waltenhofen zu meinen Untersuchungen über die Magnetisirungsfuction des Stahles; von Hugo Meyer.*

Hr. A. v. Waltenhofen hat kürzlich<sup>1)</sup> zu meinen Untersuchungen, die Magnetisirungsfuction des Stahles betreffend<sup>2)</sup>, einige Bemerkungen gemacht, die mich zu folgender Erwiderung veranlassen.

Wenn ich in meinen bezüglichen Arbeiten die Aufsätze des Hrn. v. Waltenhofen „vollständig ignorirte“, so geschah das nicht etwa, weil mir Hrn. v. Waltenhofen's zahlreiche und umfassende Untersuchungen über den Magnetismus des Stahles unbekannt gewesen wären, sondern vielmehr deshalb, weil sie zu meinen Untersuchungen in keinem directen Zu-

1) A. v. Waltenhofen, Wied. Ann. 20. p. 835. 1883.

2) H. Meyer, Wied. Ann. 18. p. 233 u. 19. p. 849. 1883.

sammenhang stehen. Während nämlich Hr. v. Waltenhofen mit magnetisirenden Kräften arbeitete, welche von der Mitte der zu prüfenden Stäbe nach den Enden hin abnahmen, habe ich stets im homogenen magnetischen Felde operirt. Es sind demnach die Ergebnisse der einen und der anderen Arbeiten nicht ohne weiteres vergleichbar.

Hr. v. Waltenhofen behauptet zunächst, er habe „den Satz von der wachsenden Magnetisirungsfuction“ schon vor zwanzig Jahren ausgesprochen, „und zwar in einer Form, welche nicht nur angibt, dass, sondern auch wie die Magnetisirungsfuction des Stahles wächst.“ Dieser Satz soll unter seinem Namen in Wiedemann's Galvanismus, in Müller-Pfaundler's und in Pisko's Lehrbuch übergegangen sein. Ich erlaube mir, dieses zu bestreiten. Allerdings hat Hr. v. Waltenhofen für die Abhängigkeit des magnetischen Momentes  $y$  eines Stahlstabes von der magnetisirenden Kraft  $x$  die empirische Formel:

$$(I) \quad y = kx^{\frac{1}{3}}$$

aufgestellt, worin  $k$  eine Constante bezeichnet, welche ich im Folgenden durch  $k_W$  von der Neumann'schen Magnetisirungsfuction  $k_N$  unterscheiden will. Diese Formel findet sich wieder bei Wiedemann und Müller-Pfaundler (das Lehrbuch von Pisko kenne ich nicht), aber an keiner Stelle, auch nicht in den früheren Arbeiten des Hrn. v. Waltenhofen ist aus diesem Ausdruck eine Folgerung auf die Aenderung der Magnetisirungsfuction mit der magnetisirenden Kraft gezogen worden. Erst in seinen kürzlich erschienenen „Bemerkungen“ hat Hr. v. Waltenhofen diesen Schritt gethan, dabei aber, wie sich sofort zeigen wird, die Magnetisirungsfuction in einem von dem gewöhnlichen Gebrauche abweichenden Sinne defint.

Die Neumann'sche Magnetisirungsfuction ist das magnetische Moment eines unendlich gestreckten Cylinders oder eines Ringes<sup>1)</sup> von der Einheit des Volumens, welcher durch die überall constante, seiner Axe parallele Krafteinheit magnetisirt wird. Diese Function habe ich in meinen frü-

1) E. Riecke, Wied. Ann. 13. p. 488, 1881.

heren Aufsätzen durch  $k$  bezeichnet, ich nenne sie jetzt aus dem eben bezeichneten Grunde  $k_N$ . Hiernach ist es ein Irrthum, wenn Hr. v. Waltenhofen sagt: „Die Magnetisirungsfunction  $y/x = kx^{\frac{1}{2}}$  ist eben die von Hrn. H. Meyer mit  $k$  bezeichnete Grösse.“ Nach meiner Bezeichnung ist vielmehr:

$$(2) \quad v \cdot \gamma = \frac{y}{x} = k_W x^{\frac{1}{2}},$$

wenn wir annehmen dürfen, dass die Formel (1) auch in dem Falle ihre Gültigkeit behält, dass die magnetisirende Kraft überall constant ist. Die Function  $\gamma$  ist die Magnetisirungsfunction eines dem betreffenden Stahlstabe ähnlichen Elementes von der Volumeneinheit; mit dieser Function hängt die Neumann'sche Constante zusammen durch:

$$(3) \quad \gamma = \frac{k_N}{1 + k_N P},$$

wo  $P$  eine von den Dimensionen des Stabes abhängende Constante ist; für einen unendlich gestreckten Cylinder und den Ring wird sie Null. Daraus ergibt sich dann für den Zusammenhang der Functionen  $k_N$  und  $k_W$  die Relation:

$$(4) \quad k_N = \frac{k_W x^{\frac{1}{2}}}{v - P k_W x^{\frac{1}{2}}} \quad \text{oder:} \quad (5) \quad k_W = \frac{v \gamma}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{v}{x^{\frac{1}{2}}} \frac{k_N}{1 + k_N P}.$$

Da  $k_W$  eine endliche Constante sein soll, so liefert die Formel (4) für  $x = 0$  auch  $k_N = 0$ , während nach den bisherigen Erfahrungen bei allen magnetischen Körpern  $k_N$  für eine verschwindende magnetisirende Kraft einen positiven, von Null verschiedenen Werth besitzt.

Ist ferner das v. Waltenhofen'sche Gesetz (1) allgemein gültig für Werthe der magnetisirenden Kraft, welche von Null verschieden sind, so muss, wenn man aus den bekannten Werthen von  $k_N$ ,  $P$ ,  $v$  oder von  $\gamma$ ,  $v$  für beliebige Werthe von  $x$ , innerhalb gewisser Grenzen, nach Formel (5)  $k_W$  berechnet, diese Grösse merklich constant sein.

Um dieses zu prüfen, habe ich zunächst aus meinen früher mitgetheilten Beobachtungen die Grösse  $k_W$  für die damals benutzten magnetisirenden Kräfte  $x = 1,889$  und  $x = 3,630$ , welche unterhalb der oberen Grenze liegen, be-



rechnet und die Resultate für  $0,01 \times k_W$  in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Stab Nr.	Stahlsorte I		Stahlsorte II		Stahlsorte III	
	$x = 1,889$	$x = 3,630$	$x = 1,889$	$x = 3,630$	$x = 1,889$	$x = 3,630$
1	294	247	241	200	283	235
2	347	290	272	227	332	276
3	406	341	312	260	384	318
4	316	266	374	310	445	375
5	277	229	282	235	248	212
6	310	257	309	258	285	240
7	158	130	113	92	166	138
8	177	144	126	103	180	152
9	183	152	133	110	192	165

Bei keinem dieser 27 Stäbe ist also  $k_W$  constant, es ist vielmehr ausnahmslos  $k_W$  kleiner für die grössere magnetisirende Kraft.

Dasselbe Resultat habe ich bei der Berechnung der von Rowland<sup>1)</sup> an Stahlringen ausgeführten Beobachtungen erhalten. Ich gebe in der nachfolgenden Tabelle für die magnetisirenden Kräfte  $x$  die Neumann'sche Constante  $k_N$  und den Quotienten  $k_W/v = k_N/x^{\frac{1}{2}}$ , wie sie aus Rowland's Beobachtungen folgen.

Bessemer Steel, Normal			Stubb's Steel Wire, Normal		
$x$	$k_N$	$\frac{k_W}{v}$	$x$	$k_N$	$\frac{k_W}{v}$
0,136	15,20	29,59	0,167	5,96	10,82
0,279	18,86	28,85	0,624	6,80	7,96
0,529	20,61	25,49	1,084	6,92	6,73
0,940	25,78	26,32	2,043	7,51	5,92
1,421	34,22	30,44	2,714	7,96	5,70
1,880	47,35	38,39	4,221	9,34	5,78
1,947	50,05	40,08	10,26	20,73	9,54
2,300	68,28	51,72	13,65	25,12	10,51
2,756	91,75	65,44	19,35	25,38	9,45
3,219	99,39	67,32	27,43	23,21	7,69
3,551	100,35	65,77	33,39	21,04	6,53
4,469	101,09	61,36	35,58	20,36	6,19
5,698	95,01	51,99	38,64	19,50	5,77
11,44	66,13	29,53			
20,69	42,25	15,39			
38,99	24,91	7,35			

1) Rowland, Phil. Mag. 46. p. 152. 1873.

Was von dem Quotienten  $k_W/v$  gilt, das gilt in erhöhtem Maasse von  $k_W$ . Wir sehen also, auch hier nimmt  $k_W$  anfangs mit wachsender magnetisirender Kraft ab, sinkt bis zu einem Minimum, steigt dann wieder an, um endlich abermals zu sinken. Die Wendepunkte hängen von der Natur des Stahles ab.

Es stehen hiernach sowohl die Beobachtungen von Rowland wie auch die von mir der Zulässigkeit der Anwendung des v. Waltenhofen'schen Gesetzes auf die Bestimmung der Magnetisirungsfuction entgegen, und es ist daher nicht gestattet, aus der Formel (1) allgemeine Schlüsse auf die Aenderung der Magnetisirungsfuction mit der magnetisirenden Kraft zu ziehen. Ich wiederhole, dass dieses auch, soviel ich sehe, weder von Wiedemann, noch von Müller-Pfaundler geschehen ist.

Ebensowenig dürfte es erlaubt sein, aus Hrn. v. Waltenhofen's Untersuchungen über die Abhängigkeit des magnetischen Momentes von Stahlstäben von der Härte, dem Querschnitt und etwaigen vorausgegangenen Magnetisirungen irgend welche Folgerungen für die Aenderung der Magnetisirungsfuction mit jenen Factoren abzuleiten, und ich halte somit auch die von Hrn. v. Waltenhofen unter 2) gegen meine Arbeiten vorgebrachten Erhebungen für erledigt. Was übrigens die älteren Untersuchungen über die Magnetisirungsfuction anlangt, so verweise ich auf die Einleitung meiner ersten Abhandlung.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass ich die Resultate meiner Untersungen im vollen Umfange aufrecht erhalte.

Göttingen, im März 1884.

**XV. Ableitung des Stefan'schen Gesetzes<sup>1)</sup>,  
betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung  
von der Temperatur aus der electromagnetischen  
Lichttheorie;  
von Ludwig Boltzmann in Graz.**

Maxwell hat aus seiner electromagnetischen Lichttheorie das Resultat abgeleitet, dass ein Strahl von Licht oder strahlender Wärme auf die Flächeneinheit bei senkrechter Incidenz einen Druck ausüben muss, welcher gleich ist der in der Volumeneinheit Aether infolge der Lichtbewegung enthaltenen Energie. Sei ein absolut leerer Raum rings von für Wärmestrahlung undurchlässigen Wänden von der absoluten Temperatur  $t$  umgeben; bezeichnen wir die in der Volumeneinheit Aether infolge der Wärmestrahlung enthaltene Energie mit  $\psi(t)$ , so müssen wir bedenken, dass nicht alle Wärmestraahlen senkrecht auf die gedrückte Wand auffallen. Am einfachsten ist es, da analog einer Betrachtungsweise, welche Krönig<sup>3)</sup> auf die Gastheorie anwandte, den Raum als Würfel zu denken, dessen Seiten parallel drei rechtwinkligen Coordinatenaxen sind. Ein dem Mittelzustand am besten entsprechendes Resultat erhält man, wenn man annimmt, dass je ein Drittel der Wärmestrahlung parallel je einer der drei Coordinatenaxen sich fortpflanzt. Es wird dann auf jede Seitenfläche nur ein Drittel der gesammten Strahlen drückend wirken, und der Druck auf die Flächeneinheit der Wand wird nach Maxwell's Gesetz sein:

$$f(t) = \frac{1}{3} \psi(t);$$

man kann diese Formel auch durch folgende Ueberlegung finden. Maxwell's Resultat gilt, wenn der Strahl senkrecht auf die gedrückte Fläche auffällt und von derselben absor-

1) Stefan, Wien. Ber. 79. p. 391. 1879.

2) Maxwell A. Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford, Clarendon Press vol. II Artikel 792. p. 391. 1873.

3) Krönig, Grundzüge der Theorie der Gase. Berlin bei A. W. Hain. Pogg. Ann. 99. p. 315. 1856.

birt wird. Würde er nahe senkrecht auffallen und unter demselben Winkel reflectirt, so wäre der Druck der doppelte; bildete er dagegen mit der Normalen den Winkel  $\vartheta$  und würde mit gleicher Intensität unter demselben Winkel reflectirt, so wäre analog wie beim Stosse eines schief auffallenden Gasmolecöles bloss die lebendige Kraft der normal zur gedrückten Fläche entfallenden Componente der Bewegung massgebend, welche gleich der mit  $\cos^2 \vartheta$  multiplicirten gesammten lebendigen Kraft des Strahles ist. (Sowohl das Bewegungsmoment als auch die auftreffende Menge erscheint mit  $\cos \vartheta$  multiplicirt). Bezeichnen wir daher die gesammte lebendige Kraft der Strahlen in der Volumeneinheit wieder mit  $\psi(t)$ , so ist die lebendige Kraft derjenigen Strahlen, deren Winkel mit der Normalen zur gedrückten Fläche zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  liegt, und welche sich in der Richtung gegen die gedrückte Fläche hin fortpflanzen, gleich  $\frac{1}{2} \psi(t) \sin \vartheta d\vartheta$ ; genau ebenso gross ist die lebendige Kraft der Strahlen, welche sich längs derselben Geraden, aber von der gedrückten Fläche hinweg, fortpflanzen. Die gesammte Energie beider Strahlengattungen zusammen ist daher  $\psi(t) \sin \vartheta \cdot d\vartheta$ , und sie üben nach dem oben Gesagten auf die Flächeneinheit den Druck  $\psi(t) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$  aus. Um alle überhaupt vorhandenen Strahlen zu erhalten, haben wir diesen Ausdruck von Null bis  $\pi/2$  zu integriren, was den schon früher angegebenen Werth  $\frac{1}{2} \psi(t)$  liefert.

In meinem Aufsatze über eine von Bartoli entdeckte Beziehung der strahlenden Wärme zum zweiten Hauptsatze<sup>1)</sup> habe ich gezeigt, dass sich zwischen den beiden Functionen  $\psi$  und  $f$ <sup>2)</sup> aus dem zweiten Hauptsatze die Beziehung ergibt  $f = t f \psi dt / t^2$ , deren Differential lautet:  $t df - f dt = \psi dt$ , wenn also, wie aus der electromagnetischen Lichttheorie folgt,  $f = \frac{1}{2} \psi$  gesetzt wird, so erhält man:  $t d\psi / 3 = 4 \psi dt / 3$  und durch Integration  $\psi = ct^4$ , ein Gesetz, welches bekanntlich schon vor längerer Zeit von Stefan empirisch aufgestellt

1) Boltzmann. Wied. Ann. 22. p. 98. 1884.

2)  $\psi(t)$  ist die dort mit  $4\varphi(t)/cJ$  bezeichnete Grösse, vgl. p. 35.

und in guter Uebereinstimmung mit den Beobachtungen gefunden wurde. Es folgt also aus der electromagnetischen Lichttheorie und dem zweiten Hauptsatze unmittelbar das Stefan'sche Gesetz der Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur, ein gewiss bemerkenswerthes Resultat, wenn auch sicher niemand den vielfach provisorischen Charakter der hier durchgeführten Rechnungen verkennen wird.

Man sieht leicht, dass sich auch umgekehrt aus dem zweiten Hauptsatze und dem Stefan'schen Strahlungsgesetze die Folgerung ergibt, dass in einem von Wärme undurchlässigen und gleich temperirten Wänden umgebenen Raum der Druck der Wärmestrahlung auf die Flächeneinheit gleich dem dritten Theile der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie der Strahlung ist, dass also ein Strahl, welcher senkrecht auf eine ebene Fläche vom Flächeninhalte Eins auffällt, auf diese einen Druck ausübt, welcher gleich ist der in der Volumeneinheit des Strahles enthaltenen Energie, sobald er von der gedrückten Fläche absorbirt wird; wird er dagegen von dieser mit ungeschwächter Intensität reflectirt, so ist der Druck doppelt so gross, also gleich der im einfallenden und reflectirten Strahle zusammen auf die Volumeneinheit entfallenden Energie. Nach der Emissionstheorie müsste der Druck, wie mir scheint, entgegen der von Bartoli l. c. angeführten Ansicht Hirn's in allen diesen Fällen doppelt so gross sein, als es hier gefunden wurde. Es scheint mir übrigens, dass man durch ähnliche Hypothesen, wie sie Kirchhoff in seiner bekannten Abhandlung über Gleichheit des Absorptions- und Emissionsvermögens<sup>1)</sup> aufstellte, auch beweisen könnte, dass dieses Gesetz für vollkommen schwarze Körper, nicht bloß für die gesammte ausgestrahlte Wärmemenge, sondern auch für jede einzelne Strahlengattung für sich gelten muss, sodass bei allen Temperaturen die von einem schwarzen Körper ausgesandte Wärme einer gewissen Strahlengattung der gleiche Bruchtheil der gesammten aus-

1) Kirchhoff, Pogg. Ann. 109. p. 275. 1860. Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1861.

gesandten Wärme sein müsste, wie unter anderen Lecher<sup>1)</sup> vermuthete.

Ich erwähne hier noch eine etwas einfachere Ableitungsweise der Gleichung zwischen den Functionen  $\psi$  und  $f$  aus dem Bartoli'schen Processe. Sei in einem Hohlcyylinder von absolut schwarzer, Wärme undurchlässiger Umhüllung ein eben solcher Stempel  $S$  verschiebbar, derselbe berühre anfangs die Basis  $B$  des Cylinders, welche den Flächeninhalt Eins und die Temperatur  $t_0$  haben soll und entferne sich von derselben bis zur Distanz  $a$  (er befinde sich rechts von der Basis  $B$ ). Die ganze, in Form von Strahlung zwischen  $B$  und  $S$  vorhandene Wärme  $a \cdot \psi(t_0)$ , sowie die ganze, zur Bewegung von  $S$  aufgewendete Wärme  $a f(t_0)$  werde von  $B$  geliefert. Die Wärme denken wir uns in Arbeitsmaass gemessen. Nun werde der Raum zwischen  $B$  und  $S$  durch einen zweiten Stempel  $T$  von  $B$  abgesperrt, sodass sich sein Zustand jetzt adiabatisch ändert, und der Stempel  $S$ , welcher, sowie die Mantelfläche des Cylinders, nur verschwindend wenig Wärme enthalten soll, bewege sich noch um das Stück  $x$  weiter. Für diese Zustandsänderung ist dann  $d[(a+x)\psi(t)] = -f(t)dx$ . Der Raum rechts von  $S$  und die ihn begrenzende Gegenfläche  $G$  des Cylinders sollen immer die schliesslich auch links entstehende Temperatur  $t$  gehabt haben. Alle rechts vom Stempel  $S$  sowohl durch Arbeitsleistung als auch durch Volumenverkleinerung gewonnene Wärme  $(a+x)[\psi(t) + f(t)]$  soll von dieser Gegenfläche  $G$  aufgenommen worden sein. Der Process ist umkehrbar; es ist also:

$$(a+x)[\psi(t) + f(t)] / t = a[\psi(t_0) + f(t_0)] / t_0 = c.$$

Wir wollen nun  $a$  und  $t_0$ , somit auch  $c$  als constant,  $x$  und  $t$  als veränderlich betrachten, addirt man zur vorigen Gleichung beiderseits  $d[(a+x)f(t)]$ , so ergibt sich mit Beachtung des Differentials der letzten Gleichung das Resultat:

$$\psi(t)dt + f(t)dt = tdf(t),$$

was mit der obigen Gleichung übereinstimmt.

1) Lecher, Wien. Ber. 85. p. 441. 1882. Wied. Ann. 17. p. 477. 1882.

# XVI. Elementarer Beweis des Satzes von Avogadro; von G. Krebs.

Der Satz, dass gleiche Volumina verschiedener Gase bei demselben Druck und derselben Temperatur gleichviel Moleküle enthalten, lässt sich aus einer Gleichung über den Stoss der Gasmoleküle gegen eine Wand ableiten, die zuerst von Krönig<sup>1)</sup> unter vereinfachenden Bedingungen aufgestellt worden ist. Clausius<sup>2)</sup> hat späterhin den Satz in voller Allgemeinheit mit höherer Mathematik erwiesen. Elementare Beweise haben Zöppritz<sup>3)</sup>, Pfaundler<sup>4)</sup> und Maxwell (in seiner Theorie of Heat) gegeben.

Ich erlaube mir nun, einen anderen elementaren Beweis mitzutheilen, der sich auf einen Satz stützt, welcher in den Lehrbüchern der Physik bewiesen zu werden pflegt. Wir führen diesen Satz zuerst an:

a) Enthält ein Flüssigkeitsstrahl vom Querschnitt 1 auf der Einheit der Länge  $n_1$  Moleküle von der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $u$ , so ist die in der Zeiteinheit gegen die Flächeneinheit prallende Masse gleich  $n_1 mu$ , und die in der beliebigen Zeit  $\tau$  mit der Flächeneinheit zum Stoss kommende Masse gleich:

$$n_1 mu\tau.$$

Die Bewegungsgrösse dieser Masse ist:

$$n_1 mu^2\tau,$$

und der entsprechende Zeiteffect einer Kraft  $k$ , welche die Masse  $n_1 mu\tau$  in der Zeit  $\tau$  auf die Geschwindigkeit  $u$  bringen könnte und denselben Effect zu erzielen vermöchte, wie die anprallende Masse:

$$(1) \quad k\tau = n_1 mu^2\tau, \text{ woraus: } k = n_1 mu^2.$$

Denkt man sich ein Prisma von den Kanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  mit  $n$  Gasmolekülen ausgefüllt, welche in der Richtung von  $a$

1) Krönig, Pogg. Ann. 99. p. 315. 1856.

2) Clausius, Pogg. Ann. 100. p. 353. 1857.

3) Zöppritz, Naumann's Grundriss der Thermochemie p. 28.

4) Pfaundler, Pogg. Ann. 144. p. 428. 1871.



senkrecht zur Fläche  $bc$  ( $A$ ) die Geschwindigkeit  $u$  haben, so ist die dem specifischen Druck entsprechende Stosskraft:

$$k = \frac{n}{a \cdot b \cdot c} \cdot m u^2.$$

Denselben Werth hat  $k$ , wenn die Molecüle sich senkrecht gegen die Fläche  $ab$  ( $C$ ) oder  $ac$  ( $B$ ) mit der Geschwindigkeit  $u$  bewegen.

$k$  ist das, was man die „Spannkraft“ des Gases nennt. Bezeichnet man nun  $k \cdot a \cdot b \cdot c$  oder  $k \cdot v$ , wo  $v$  das Volumen des Prismas bezeichnet, mit  $K$ , so ist:

$$(2) \quad K = n m u^2.$$

$K$  ist die Kraft, welche die ganze, in dem Volumen  $v$  befindliche Masse ebenso zu beschleunigen vermag, wie die Kraft  $k$  die in der Volumeneinheit befindliche Masse.  $K$  könnte man „Druckfunction“ nennen; durch  $v$  dividirt, erhält man den specifischen Druck und, durch  $c$ ,  $b$  oder  $a$  dividirt, den Gesamtdruck auf eine der drei Flächen  $A$ ,  $B$  oder  $C$ .

$\beta$ ) Die Molecüle einer in einem Gefäss eingeschlossenen Gasmasse verhalten sich aber nicht wie die Theilchen eines Flüssigkeitsstrahles, welche eine fortschreitende Bewegung ausführen, d. h. parallel neben- und hintereinander, mit gleicher Geschwindigkeit und ohne einander zu stossen, herlaufen. Die Molecüle einer Gasmasse haben im Gegentheil die verschiedensten Geschwindigkeitsrichtungen, sodass sie bald da, bald dort gegeneinander stossen. (Da es für den Druck eines Gases gegen eine Wand gleichgültig ist, ob ein  $n$ faches oder  $n$ einfache Molecüle gegen dieselbe prallen, so setzen wir alle Molecüle als einfach voraus.)

Krönig nimmt ohne weiteres an, dass die Molecüle eines Gases vollkommen elastisch seien, und dass dieselben einander gerade und central stiessen. Clausius und andere halten sich von dieser Annahme frei, doch aber lässt sich leicht zeigen, dass wenn auch in Wirklichkeit die Molecüle nicht vollkommen elastisch, und die Stösse nicht gerade und central wären, man doch die Krönig'sche Annahme, unbe-

schadet des Effectes machen dürfte. Gesetzt nämlich, die Molecüle erlitten durch die Stösse Deformationen, welche sich nicht von selbst, oder durch andere Stösse wiederherstellten, so würde ein Verlust an lebendiger Kraft (der fortschreitenden Bewegung) und somit ein Sinken der Temperatur eintreten. Dasselbe würde geschehen, wenn durch excentrische Stösse ein Theil der fortschreitenden Bewegung sich in rotirende verwandelte, ohne durch andere Stösse wieder in fortschreitende zurückverwandelt zu werden. Wenn umgekehrt rotirende Bewegung sich dauernd in fortschreitende verwandelte, so musste die Temperatur steigen. Nun kann aber ein Gas oder irgend ein Körper seinen Temperaturzustand nicht von selbst, d. h. ohne Wärmezufuhr oder abfuhr von aussen ändern; folglich sind dauernde Deformationen und dauernde Verwandlungen von fortschreitender Bewegung in rotirende, oder umgekehrt, nicht anzunehmen, oder mit anderen Worten, die Molecüle verhalten sich genau wie vollkommen elastische Körper, welche einander gerade und central stossen.

γ) Wenn zwei elastische Körper von gleicher Masse einander central stossen, so vertauschen sie ihre Geschwindigkeiten. Gesetzt nun, die Bewegung eines Gasmolecüles sei senkrecht gegen einen Theil der Gefässwand gerichtet, so überträgt es seine Geschwindigkeit, wenn es nicht selbst gegen die Wand prallt, auf ein zweites, dieses möglicherweise auf ein drittes Molecül u. s. w. Jedes derselben nimmt die Geschwindigkeit des ersten als Componente in sich auf, und wenn schliesslich ein  $n$ . Molecül gegen die Wand prallt, so überträgt es (von seiner eigenen Geschwindigkeit abgesehen) den vom ersten empfangenen, senkrecht gegen die Wand gerichteten Stoss unverändert auf diese. Es ist deswegen einerlei, ob das erste Molecül selbst gegen die Wand stösst oder seine Bewegung auf andere überträgt. Wir können deshalb annehmen, jedes Molecül setze seinen Weg ungehindert von den anderen nach der Wand hin fort.

δ) Man denke sich in einem vierseitig rechteckigen prismatischen Gefässe ein Molecül von beliebiger Geschwindig-

keitsrichtung, so kann man seine Geschwindigkeit  $w$  in drei Geschwindigkeiten  $x_1, y_1, z_1$  zerlegen; die erste soll senkrecht gegen die Wandfläche  $A$ , die zweite senkrecht gegen  $B$ , die dritte senkrecht gegen  $C$  gerichtet sein. Dann gilt:

$$(3) \quad w^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Statt eines Molecüles mit der Geschwindigkeit  $w$  kann man hiernach drei solcher annehmen, welche gleichzeitig von demselben Punkt mit den Geschwindigkeiten  $x \perp A$ ,  $y \perp B$  und  $z \perp C$  ausgehen.

Stellen wir uns nun alle Molecüle vor, welche sich gleichzeitig in einer und derselben Ebene  $E \parallel A$  (und  $\parallel A'$ , wo  $A'$  die Gegenfläche von  $A$ ) befinden, so ist bei der grossen Zahl gleichzeitig durch  $E$  gehender Molecüle mit grösster Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass zu jedem Molecül, welches nach  $A$  hingeht, ein zweites existirt, welches in entgegengesetzter (ungleichstimmig paralleler Richtung) nach  $A'$  geht. Der Umstand, dass der Druck auf alle Stellen der ganzen Gefässwand thatsächlich derselbe ist, erhebt die Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit.

Betrachten wir zunächst blos diejenigen Molecüle in der Ebene  $E$ , deren Geschwindigkeit die Richtung nach  $A$  hat, so gelten für dieselben die Gleichungen:

$$w^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$w^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

$$w^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Statt jedes dieser Molecüle kann man, wie schon bemerkt, drei solcher annehmen, welche bezüglich die Geschwindigkeiten  $x_1, x_2, x_3 \dots \perp A$ ;  $y_1, y_2, y_3 \dots \perp B$ ;  $z_1, z_2, z_3 \dots \perp C$  haben.

Nun gehen durch jeden Punkt von  $E$  nach der Reihe Molecüle nach den verschiedensten Richtungen, deren Geschwindigkeitscomponenten  $\perp A$  sehr verschiedene Werthe haben. Für den Druck auf irgend einen Punkt von  $A$  ist es aber gleichgültig, ob (innerhalb einer sehr kurzen Zeit)

Molecüle von verschiedenen Geschwindigkeiten  $x_1, x_2 \dots$  anprallen, oder ob sie alle eine mittlere Geschwindigkeit  $x$  haben, derart dass:

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots$$

Diese mittlere Geschwindigkeit ist für alle Punkte von  $E$  dieselbe, wenn auch die Componenten  $\perp A$  an den einzelnen Punkten von  $E$  in der verschiedensten Ordnung aufeinander folgen. Legen wir jetzt durch das Prisma eine ganze Schaar von Ebenen, welche soweit voneinander abstehen, wie die gleichmässig durch den Raum vertheilten Molecüle, und welche den Seitenflächen  $A$  und  $A'$  des prismatischen Gefässes parallel sind, so gehen von allen Punkten Molecüle aus, welche sich senkrecht zu  $A$  (und  $A'$ ) mit der Geschwindigkeit  $x$  bewegen und also einen „Flüssigkeitsstrahl“ bilden.

e) Ersetzt man den Stoss durch eine Kraft, so ist:

$$P_1 = nm x^2,$$

wo  $n$  die Anzahl der Molecüle im Prisma und  $P_1$  eine Kraft bedeutet, welche die Molecüle in derselben Zeit auf die Geschwindigkeit  $x$  bringen kann, in welcher dieselben nach der Reihe zum Stoss gegen  $A$  gelangen.

Nun gehen aber auch von denselben Punkten des Prismas, resp. von einer Schaar zu  $BB'$  paralleler Ebenen Molecüle in der Richtung  $\perp B$  (und  $B'$ ) aus; bezeichnen wir ihre mittlere Geschwindigkeit mit  $y$ , so gilt:

$$y^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots$$

Den Stoss dieser Molecüle kann man durch eine Kraft:

$$P_2 = nm y^2$$

ersetzen.

Ebenso kann der Stoss gegen  $C$  (und  $C'$ ) durch eine Kraft:

$$P_3 = nm z^2$$

ausgedrückt werden.

Nun haben die Gasmolecüle ursprünglich die verschiedensten Geschwindigkeitsrichtungen, und es ist daher mit höchster Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass, wenn man jede nach drei aufeinander senkrechten Richtungen zerlegt, das Mittel aus den Componenten nach einer der drei Rich-

tungen der nach den zwei anderen gleich sei. Uebrigens zeigt die Erfahrung, dass der (specifische) Druck auf jede Wand des Gefässes derselbe ist (die specifischen Drucke erhält man, wenn man  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  je durch  $v$  dividirt; die specifischen Drucke sind den Kräften  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  proportional). Daher ist:

$$x = y = z \text{ und } P_1 = P_2 = P_3.$$

Bezeichnen wir die resultirende Kraft aus  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  mit  $P$  und die resultirende Geschwindigkeit aus  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mit  $u$ , so ist:

$$(4) \quad u^2 = 3x^2, \quad P = \frac{1}{3} n m u^2, \quad p = \frac{1}{3} \frac{n m u^2}{v}.$$

ζ) Ein Raum von beliebiger Gestalt kann als aus einer sehr grossen Zahl dünner Prismen zusammengesetzt angesehen werden. Da die Temperatur durchgängig als gleich vorausgesetzt wird, so gilt für den specifischen Druck auf die Endflächen, also auch auf die ganze Gefässwand:

$$p = \frac{1}{3} \frac{n m u^2}{v}.$$

η) Hat man zwei Gasmassen, deren Molecüle die Massen  $m_1$  und  $m_2$  und die Geschwindigkeiten  $u_1$  und  $u_2$  besitzen, so gilt für gleiche Temperatur:

$$(5) \quad \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Haben zwei Gase gleiche Spannkraft, und bedeuten  $n_1$  und  $n_2$  die in der Kubikeinheit oder überhaupt in gleichen Räumen enthaltenen Anzahlen von Molecülen, so muss nach (4) sein:

$$(6) \quad \frac{1}{3} n_1 m_1 u_1^2 = \frac{1}{3} n_2 m_2 u_2^2.$$

Setzt man nun in zwei Gasmassen, welche die Kubikeinheit, oder überhaupt gleiche Räume erfüllen, gleiche Temperatur und gleiche Spannkraft voraus, so gelten (5) und (6) gleichzeitig. Dividirt man nun mit (5) in (6), so erhält man:

$$n_1 = n_2.$$

Zwei Gasmassen von gleicher Temperatur und Spannkraft enthalten in gleichen Raumtheilen gleichviel Molecüle — Satz von Avogadro.

Uebrigens kann man unseren Satz auch auf eine etwas andere Art erweisen. Man beginnt mit der Darlegung, wie in  $\beta$ ,  $\gamma$ ) und  $\delta$ ) geschehen, dass die Gasmolecul $\ddot{u}$ le als elastisch angesehen werden k $\ddot{o}$ nnen, und dass die in einem Prisma befindlichen Gasmolecul $\ddot{u}$ le gewissermassen in drei senkrecht gegen die W $\ddot{a}$ nde gerichteten „Fl $\ddot{u}$ ssigkeitsstrahlen“ (mit gleicher Geschwindigkeit parallel neben- und hintereinander laufend) sich bewegen. Alsdann berechnet man den Druck auf die W $\ddot{a}$ nde in folgender (u $\ddot{b}$ rigens bekannter) Weise: Haben die senkrecht gegen  $A$ , also parallel der Kante  $a$  sich bewegenden Molecul $\ddot{u}$ le die Geschwindigkeit  $x$ , so prallen sie in der Secunde  $x/2a$  mal gegen  $A$  an, denn jedes Molecul $\ddot{u}$ l muss, wenn es eben gegen  $A$  gestossen ist, den Weg nach  $A'$  und zur $\ddot{u}$ ck nach  $A$  (also den Weg  $2a$ ) machen, um zum zweiten mal mit  $A$  zum Stosse zu gelangen. Die Gegenwirkung der Wand verwandelt jeden Stoss in den entgegengesetzten, sie gibt jedem Molecul $\ddot{u}$ l die Geschwindigkeit  $2x$ , indem sie die Geschwindigkeit  $x$  des Molecul $\ddot{u}$ ls nicht blos vernichtet, sondern ihm auch eine entgegengesetzte Geschwindigkeit  $x$  mittheilt. Es wird also der Masse  $nm$  in der Secunde  $x/2a$  mal die Geschwindigkeit  $2x$  ertheilt, und dies ist ebenso gut, als ob die Masse  $nm x/2a$  innerhalb einer Secunde auf die Geschwindigkeit  $2x$  gebracht w $\ddot{u}$ rde. Es ist deshalb der secundliche Zeiteffect der Gegenwirkung der Wand, also die Gegenwirkung selbst (welche der Wirkung, d. i. dem Druck auf  $A$  gleich ist):

$$D_A \cdot 1 = D_A = nm \frac{x}{2a} \cdot 2x = \frac{nm x^2}{a}.$$

Hieraus ergibt sich f $\ddot{u}$ r den specifischen Druck auf  $A$ :

$$p = \frac{nm v^2}{a \cdot b \cdot c} = \frac{nm x^2}{v}$$

woraus:

$$P = nm x^2 \text{ u. s. w.}$$

Wir schliessen hieran noch einen elementaren Beweis des Satzes u $\ddot{b}$ er das Verh $\ddot{a}$ ltnisse der fortschreitenden zur Gesamt-Bewegung der Gasmolecul $\ddot{u}$ le.

In Naumann's „Lehr- und Handbuch der Thermochemie“ wird p. 57 die Bemerkung gemacht: „Das Verh $\ddot{a}$ lt-

niss zwischen der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle zur gesammten in einem Gase enthaltenen lebendigen Kraft ist<sup>1)</sup> — unter Anwendung höherer Mathematik, weshalb auf die betreffende Entwicklung hier nur verwiesen wird — ausgedrückt durch die Gleichung  $K/H = \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma)/\gamma$ .

Es ist aber keineswegs schwer, den Satz auch mit niederer Mathematik zu erweisen.

Bedeutet  $p$  die Kraft, welche die in der Kubikeinheit des Volumens enthaltenen Molecüle so beschleunigen könnte, dass diese denselben Druck auf die Wand ausübten, wie die mit der Geschwindigkeit  $u$  sich bewegenden Molecüle, und  $P$  die Kraft, welche die in einem beliebigen Volumen  $v$  enthaltenen Molecüle in gleicher Weise in Bewegung setzen könnte, so ist (s. 4):

$$pv = P = \frac{1}{2} m n u^2,$$

wo  $n$  die Zahl der im Gesamtvolumen enthaltenen Molecüle bedeutet.

Wir denken uns nun eine Gasmasse in einem Cylinder eingeschlossen, in welchem sich ein beweglicher Kolben befindet, auf dem der specifische Druck  $p$  lastet. Wird das Gas erwärmt, und dehnt sich dasselbe bei einer gewissen Temperaturerhöhung um  $\Delta v$  aus, so ist die geleistete äussere Arbeit:

$$p \cdot \Delta v,$$

denn die Arbeit ist gleich dem Product aus dem specifischen Druck  $p$ , dem Querschnitt  $a$  des Cylinders und dem Weg  $x$  des Kolbens; nun ist aber  $a \cdot x = \Delta v$ . Beginnt die Erwärmung mit dem absoluten Nullpunkt der Temperatur, wo das Volumen des Gases als gleich Null anzunehmen ist, und setzt sie sich fort bis  $T^0$ , wo das Volumen  $v$  sein mag, so ist die geleistete äussere Arbeit:

$$pv.$$

Die specifischen Wärmen der Gase bei constantem Druck und bei constantem Volumen,  $c_p$  und  $c_v$ , bedeuten bekanntlich die Anzahlen der Calorien, welche nöthig sind, um 1 kg Gas um 1° C. (oder was einerlei ist, um 1° der absoluten Scala) zu erhitzen, dass eine mal, wenn das Gas sich bei constan-

1) R. Clausius, Pogg. Ann. 100. p. 377. 1857.



tem Druck ausdehnen, das andere mal, wenn es, in einem Gefässe eingeschlossen, sein Volumen nicht verändern kann.

Die gesammte innere und äussere Arbeit, welche bei einer Temperaturerhöhung eines Kilogrammes Gas von  $0^{\circ}$  bis  $1^{\circ}$  C. geleistet wird, ist gleich  $424 c_p$  und die innere Arbeit  $424 c_v$ ; also ist die äussere Arbeit gleich  $424 (c_p - c_v)$ . In Betreff der inneren Arbeit bemerken wir noch, dass sie bekanntlich einestheils in der Vergrösserung der fortschreitenden Bewegung der Molecüle, d. h. in der Erhöhung der Temperatur, und anderentheils in der Vergrösserung der rotirenden Bewegung der Molecüle und der vibrirenden der die Molecüle zusammensetzenden Atome besteht.

Nun ist:

$$(1) \quad pv = \frac{1}{2} m n u^2,$$

wo  $u$  die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Molecüle bedeutet.

Aus (1) folgt:

$$(2) \quad \frac{3}{2} pv = \frac{1}{2} m n u^2.$$

Die rechte Seite der Gleichung (2) gibt die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle, die Temperatur an, die linke das Anderthalbfache der durch die Erwärmung geleisteten äusseren Arbeit.

Die der Temperaturerhöhung, vom absoluten Nullpunkt bis  $T^{\circ}$  gerechnet, entsprechende innere Arbeit beträgt, weil

$$pv = 424 (c_p - c_v) \cdot T:$$

$$424 \cdot \frac{3}{2} (c_p - c_v) \cdot T$$

und die gesammte innere Arbeit:

$$424 \cdot c_v \cdot T.$$

Das Verhältniss zwischen der der Temperaturerhöhung entsprechenden inneren Arbeit und der gesammten inneren ist also:

$$\frac{424 \cdot \frac{3}{2} (c_p - c_v) \cdot T}{424 \cdot c_v \cdot T} = \frac{3}{2} \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) = \frac{3}{2} (1,41 - 1) = 0,615.$$

Es ist demnach die Energie der fortschreitenden Bewegung der Molecüle nur etwa  $\frac{3}{5}$  von der gesammten inneren Energie;  $\frac{2}{5}$  kommen auf die Energie der rotirenden Bewegung der Molecüle und der vibrirenden der die Molecüle zusammensetzenden Atome.

**XVII. Ueber eine Einrichtung zur Darstellung der von der Pariser Conferenz zur Bestimmung der electrischen Einheiten angenommenen Lichteinheit; von Werner Siemens.**

(Aus den Sitzungsber. der k. Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 15. Mai 1884.)

Die internationale Conferenz zur Bestimmung der electrischen Einheiten, welche kürzlich in Paris tagte, hat unter anderem auch beschlossen, als Lichteinheit die Menge des Lichtes anzunehmen, welche von einer Fläche von 1 qcm geschmolzenen Platins ausgeht, welches in Erstarrung begriffen ist. Sollte diese Einheit eine praktische Bedeutung erhalten, so war es nöthig, eine einfache, leicht verwendbare Einrichtung zu treffen, um vergleichende Messungen mit ihr an beliebigen Orten ausführen zu können. Es schien diese Aufgabe besonders durch den Umstand sehr erschwert, dass das Platin beim Schmelzen leicht Kohle, Silicium und andere Stoffe aufnimmt, wodurch seine Schmelztemperatur wesentlich erniedrigt wird.

Der kleine Apparat, welchen ich der Akademie hier vorlege, entspricht eigentlich der Definition der Lichteinheit, wie sie in Paris festgesetzt ist, nicht ganz, da er die Lichtmenge, die von schmelzendem, und nicht die, welche von erstarrendem Platin ausgeht, angibt. Es ist aber wahrscheinlich, dass diese Differenz bei chemisch reinem Platin sehr klein ist. Die Einrichtung basirt auf der Schmelzung eines sehr dünnen Platinbleches durch den galvanischen Strom. Das Blech ist in einen Metallkasten eingeschlossen, welcher dem vom glühenden Bleche ausgehenden Lichte nur den Austritt durch ein Loch von 0,1 qcm Querschnitt gestattet, welches demselben nahe gegenübersteht. Die Wände des Loches sind conisch und das Platinblech überragt dasselbe nach allen Seiten. Im Augenblicke des Schmelzens des Platinbleches tritt daher aus dem Loche eine Lichtmenge von 0,1 der Lichteinheit.

Durch langsame Vermehrung der Stromstärke kann man bewirken, dass der Augenblick des Schmelzens des Bleches erst eintritt, nachdem man das Gleichgewicht der Beleuchtung mit der zu messenden Lichtquelle genau festgestellt hat. Nach vorläufigen Messungen ist die Lichtmenge, welche im Augenblicke des Schmelzens vom Apparate ausgeht, nahe gleich 1,5 englischen Normalkerzen.